El número de oro[1]

José Antonio Cobalea

Julio-Agosto de 2005

[1] Práctica final del curso Guadalinex y aplicaciones didácticas (ED05-04-GLINEX)

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Hay tres números de gran importancia en Matemáticas a los cuales nombramos con una letra. Estos números son:

1. El número designado con la letra griega π "Pi" que relaciona la longitud de la circunferencia con su diámetro: $Longitud = \pi \cdot diametro$.

2. El número e, inicial del apellido de Leonhard Euler (matemático suizo del siglo XVIII) que aparece como límite de la sucesión de término general: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

3. El número designado con la letra griega ϕ "Fi", llamado **número de oro ó número áureo** y que es la inicial del nombre del escultor griego Fidias que lo tuvo presente en sus obras. Corresponde a la solución positiva de la ecuación $x^2 = x + 1$. Como veremos este número mide, entre otras, la relación que existe entre la diagonal de un pentágono regular y su lado.

Los tres números tienen infinitas cifras decimales y no son números decimales periódicos (no existe ningún grupo de cifras decimales que se repitan indefinidamente). A estos números se les llaman irracionales. Es imposible conocer todas las cifras de dichos números y cuando se utilizan se escriben únicamente unas cuantas cifras decimales (suficientes para la mayoría de los cálculos donde aparezcan). Por ejemplo:

- $\pi = 3'14159...$
- $e = 2'71828...$
- $\phi = 1'61803...$

Una diferencia importante desde el punto de vista matemático entre los dos números ($\pi\, y\, e$) y el número de oro es que los primeros no son solución de ninguna ecuación polinómica (a estos números que cumplen esta condición se les llama números trascendentes), mientras que el número ϕ sí que lo es. Efectivamente, una de las soluciones de la ecuación de segundo grado $x^2 - x - 1 = 0$ es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que da como resultado el número de oro.

El número áureo no recibió su símbolo , ϕ , hasta el siglo XX aunque su descubrimiento data de la época de la Grecia clásica (siglo V a.C.), donde era perfectamente conocido y utilizado en los diseños arquitectónicos (por ejemplo el Partenón) y escultóricos. Fué seguramente el estudio de las proporciones y de la medida geométrica de un segmento lo que llevó a los griegos clásicos a su descubrimiento.

Capítulo 2

Ejemplos en las Matemáticas donde aparece ϕ

2.1. La sección áurea y el número de oro

La sección áurea es la división armónica de un segmento en media y extrema razón. Es decir, que el segmento menor es al segmento mayor como éste es a la totalidad del segmento (ó como decía Vitrubio: "Un segmento se dice que está dividido en media y extrema razón si de la parte pequeña a la parte grande hay la misma relación que de la grande al todo"). Esta forma de seleccionar proporcionalmente un segmento se llama proporción áurea.

Tomemos un segmento de longitud la unidad y hagamos en él la división indicada anteriormente.

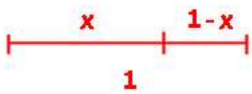


Figura 2.1: Segmento unidad

Aplicando la proporción áurea obtendremos una ecuación que tendremos que resolver:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Una de cuyas soluciones (la positiva) vale:

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Por tanto: $1 - x = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ahora, si dividimos la longitud del segmento mayor entre la del menor, obtendremos:

$\frac{x}{1-x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} : \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(-1+\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})\cdot(3+\sqrt{5})} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{2\cdot\sqrt{5}+2}{4} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'61803...$

que nos da el número de oro.

Es decir, la relación entre la parte mayor y la parte menor en que dividimos el segmento es el número de oro.

Veamos cómo dividir un segmento dado $\overline{AB}$ en media y extrema razón:

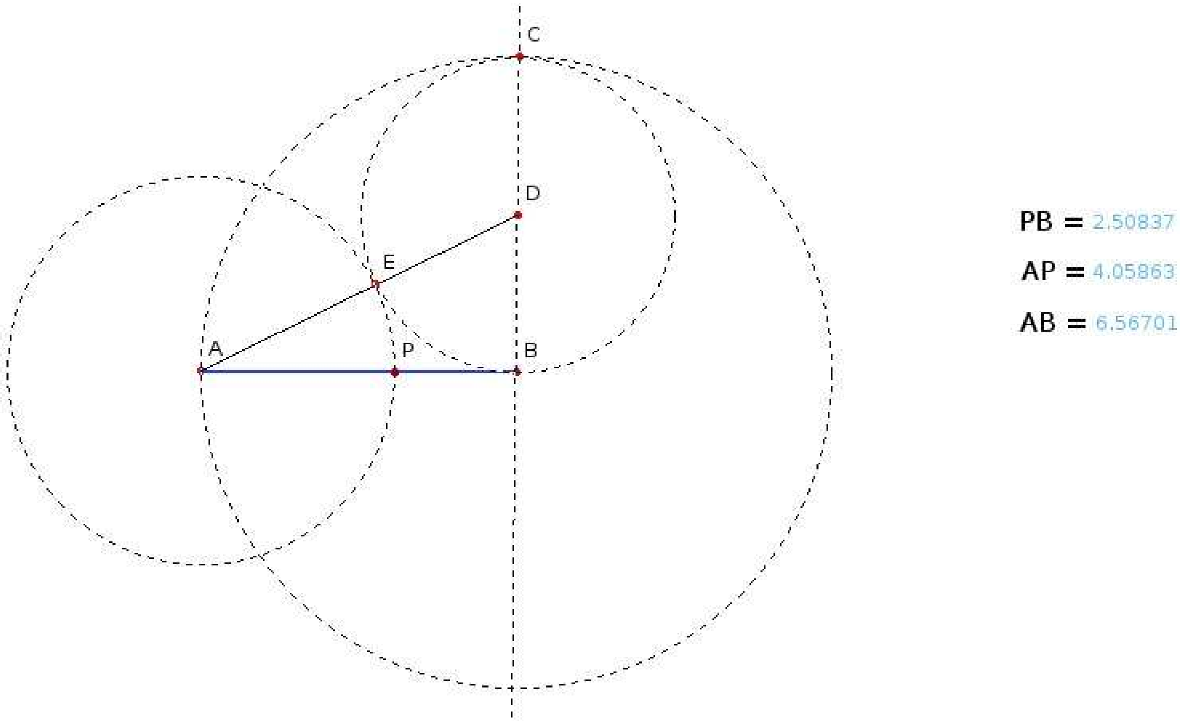


Figura 2.2: División aúrea de un segmento

- Se construye la perpendicular a $\overline{AB}$ y que pasa por B.
- Hallamos el punto C tal que $AB = BC$.
- Construimos el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y le llamamos D.
- Construimos el segmento $\overline{AD}$.
- Con centro en D y radio DB calculamos el punto E sobre $\overline{AD}$.
- Con centro en A y radio AE calculamos el punto P sobre $\overline{AB}$.
- El punto P divide al segmento $\overline{AB}$ en la razón áurea y el segmento $\overline{AP}$ es la sección áurea del segmento $\overline{AB}$. Además:
  - $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \phi$

2.2. El rectángulo áureo

Se denomina rectángulo áureo o rectángulo de oro al rectángulo en el que la base y la altura están en proporción áurea.

Para construirlo procedemos de la siguiente forma:

Dibujamos un cuadrado y marcamos el punto medio de uno de sus lados. Lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esa distancia sobre el lado inicial (AB). De esta manera obtendremos el lado mayor del rectángulo. Véase la figura 2.3

Si el lado del cuadrado, AB, mide dos unidades, la distancia del punto medio de AB al vértice de su lado opuesto vale $\sqrt{5}$ y por tanto la relación entre la base y la altura es:

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'61803$...(nuestro número de oro).

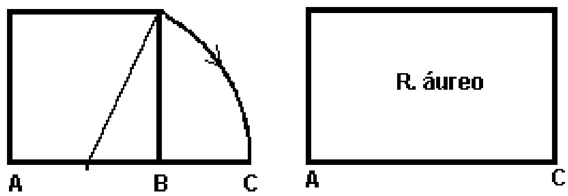


Figura 2.3: Rectángulo áureo (construcción 1)

Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podremos construir otros semejantes que, como veremos más adelante, se han utilizado en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).

También se puede construir un rectángulo de oro a partir de un triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 (véase la siguiente figura 2.4)

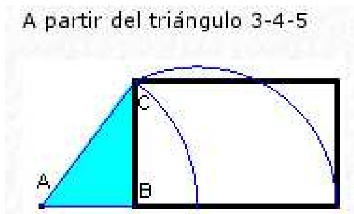


Figura 2.4: Rectángulo áureo (construcción 2)

Otra forma de construir dicho rectángulo es a partir del triángulo rectángulo de lados 1 y 2 (véase la siguiente figura 2.5)

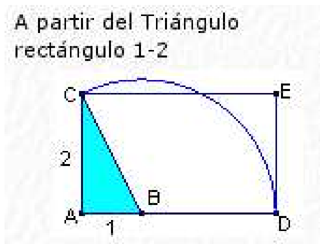


Figura 2.5: Rectángulo áureo (construcción 3)

También se puede construir nuestro rectángulo a partir de dos cuadrados iguales (véase la siguiente figura 2.6)

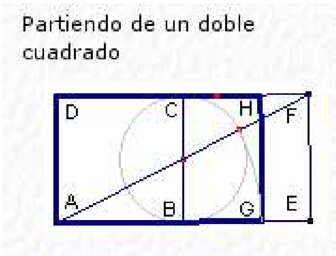


Figura 2.6: Rectángulo áureo (construcción 4)

Una propiedad importante de los rectángulos áureos es que cuando se colocan dos iguales como indica la figura 2.7 la diagonal AB siempre pasa por el vértice C.

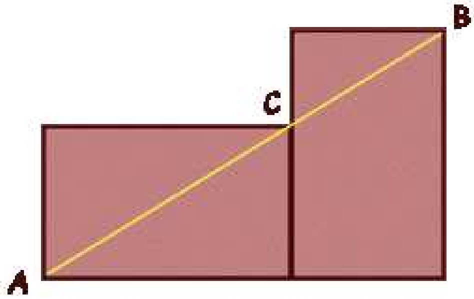


Figura 2.7: Una importante propiedad

En efecto, situemos los rectángulos en unos ejes de coordenadas con origen en el punto A. Entonces podremos elegir la unidad en dicho sistema de ejes para que las coordenadas de los tres puntos que aparecen en la figura 2.7 sean[1]:

$A = (0,0)$
$C = (1+\sqrt{5}, 2)$
$B = (3+\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$

Vamos a ver que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen la misma dirección[2]:
$\overrightarrow{AB} = (3+\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$
$\overrightarrow{AC} = (1+\sqrt{5}, 2)$

Pero $\overrightarrow{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \overrightarrow{AC}$.
Luego tienen la misma dirección.

2.3. La espiral áurea

Si le añadimos a un rectángulo áureo un cuadrado construido sobre su lado mayor se obtiene otro rectángulo que también es áureo. De esta forma fácilmente se puede construir una sucesión de rectángulos de oro como se muestra en la figura 2.8. Para construir la espiral[3] que aparece en la misma basta con trazar arcos sobre cada uno de los cuadrados. Podría continuarse dicha espiral tanto por dentro como por fuera indefinidamente.

[1] Esto no representa ninguna restricción pues todos los rectángulos áureos son semejantes.
[2] Con esto veríamos que los puntos A, C y B están alineados.
[3] En realidad no es una espiral propiamente dicha ya que está formada por arcos de circunferencia y en consecuencia la variación del radio no es contínua.

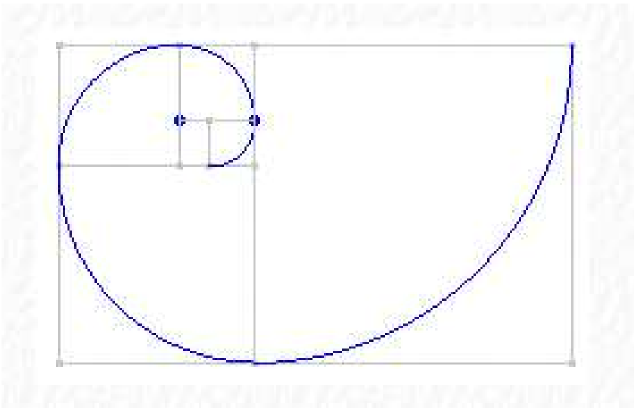
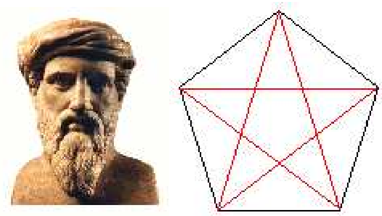


Figura 2.8: Construyendo la espiral de oro

2.4. La estrella pentagonal

La estrella pentagonal o pentágono estrellado era, según la tradición, el símbolo de los seguidores de Pitágoras[4]. Los pitagóricos pensaban que el mundo estaba configurado según un orden numérico, donde sólo tenían cabida los números fraccionarios. La casualidad hizo que en su propio símbolo se encontrara un número raro: el número de oro.



(a) Pitágoras de Samos

(b) Estrella pentagonal

Figura 2.9:

La relación entre la diagonal del pentágono regular y su lado es ϕ.

Demostración:

Si consideramos el lado del pentágono la unidad 2.1 basta aplicar el teorema del coseno al triángulo ABC y resulta que AC es el número áureo.

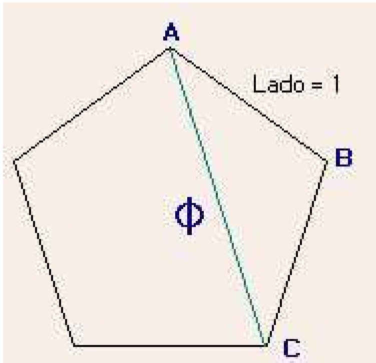
$$AC^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 108^o = 2 \cdot (1 - \cos 108^0) = 2'61803398...$$

Extrayendo la raiz cuadrada, resulta que $AC = 1'6180340... = \phi$.

Considerando en la siguiente figura 2.10 el lado del pentágono $AG = 1$ pueden obtenerse de forma inmediata las siguientes expresiones:

$$MF = NG = 1$$

[4]Pitágoras (c. 582 - c. 500 a.C.), filósofo y matemático griego nacido en la isla de Samos.



Cuadro 2.1: Pentágono regular de lado uno

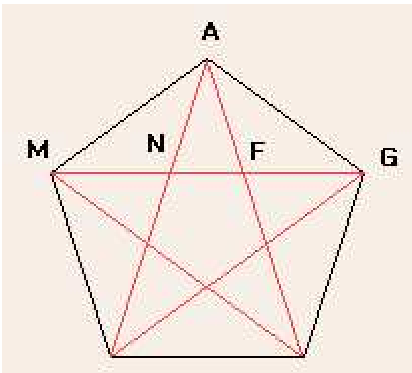


Figura 2.10: Relaciones en un pentágono regular de lado uno

$$MG = \phi$$

$$FG = \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$$

$$NF = 1 - FG = 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi - 1}{\phi} = \frac{1}{\phi^2}$$

En la figura 2.10 los segmentos $\overline{MN}$, $\overline{NG}$ y $\overline{MG}$ están en proporción áurea, esto es:

$$\frac{\overline{NG}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{NG}} = \phi$$

2.4.1. Observaciones

- El pentágono regular es uno de los pocos polígonos regulares con un número primo de lados que puede construirse de forma exacta con regla y compás. Ptolomeo ya dio un procedimiento para tal construcción[5] (ver figura 2.11)

[5] M es el punto medio del segmento OX y centro del arco que pasa por A y D. A es el centro del arco que pasa por D y B. $\overline{AB}$ es el lado del pentágono.

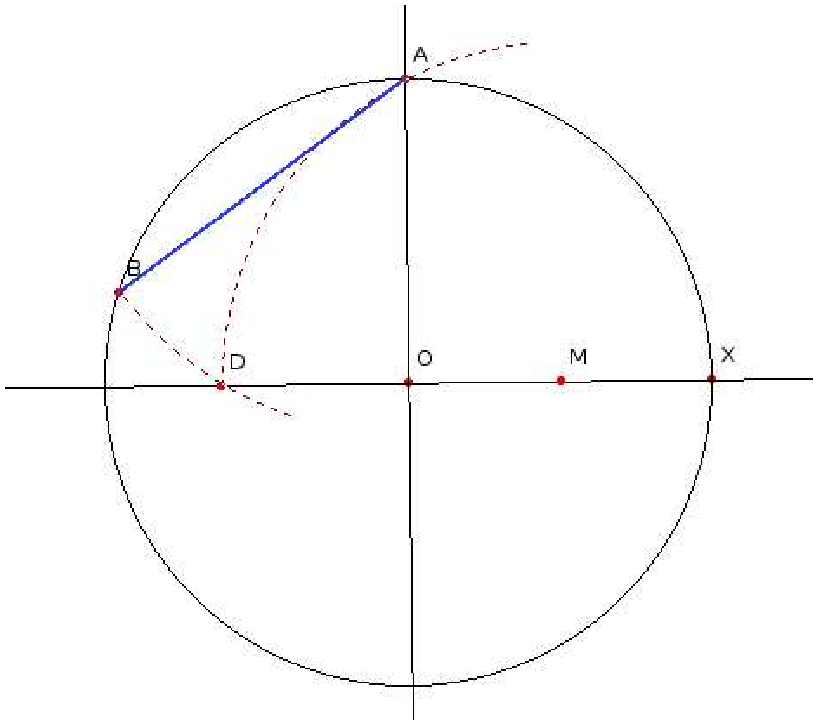


Figura 2.11: Construcción con regla y compás del pentágono regular (Ptolomeo)

- La construcción tiene relación con el número de oro.
- Podemos seguir los siguientes pasos para comprobar que el método seguido es exacto:
  - Probar, utilizando para ello un triángulo isósceles de ángulos 72^o, 72^o y 36^o, que $\phi = 2 \cdot \cos 36^o$.
  - Probar que en todo triángulo isósceles del tipo anterior el lado mayor y el menor están en proporción áurea.
  - Calcular cuánto vale el lado de un pentágono regular inscrito en un círculo de radio 1[6]. Usar el primer resultado para concluir que este valor es de:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

  - Comprobar que ese mismo valor es el que se obtiene con la construcción de Ptolomeo en el mismo supuesto de que el círculo circunscrito tenga radio 1.
- ¿Qué pudo hacer que los pitagóricos sintieran tanta admiración por el número áureo?. Casi con toda seguridad, para la escuela pitagórica la consideración del irracional $5^{1/2}$, de cuya existencia tuvieron conciencia antes que de $2^{1/2}$, tuvo que causar una profunda reflexión en las teorías de la secta. Si tienes alguna duda de las relaciones del número áureo con el pentágono estrellado ... ¡mira la siguiente figura 2.12!, y así hasta el infinito. Siempre que encuentres un pentágono regular podrás hacer lo mismo.

[6]Dicho valor vale $2 \cdot sen\, 36^o$.

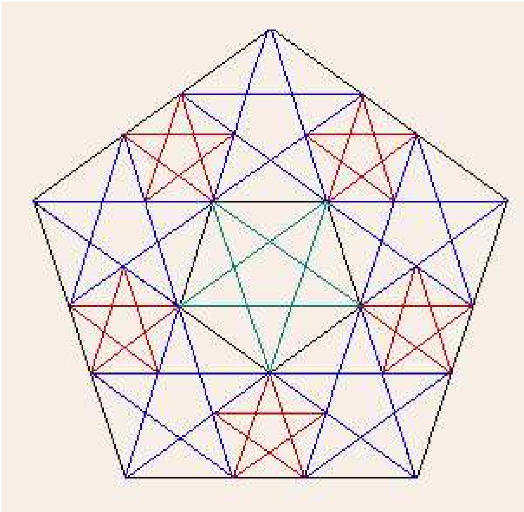


Figura 2.12: Pentágonos estrellados

2.4.2. La Trigonometría y el número de oro

Consideremos un pentágono regular en el cual se han dibujado las diagonales. En esta figura sólo aparecen tres ángulos diferentes: miden 36^o, $72^o\, y\, 108^o$.

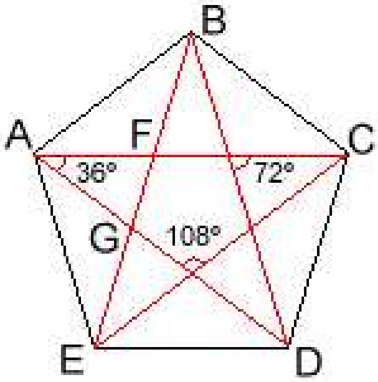


Figura 2.13: Pentágono regular con sus diagonales y ángulos

La relación entre estos ángulos es la siguiente: 72 es el doble de 36 y 108 es el triple de 36. En la figura hay varios tipos de triángulos isósceles, de los cuales seleccionamos tres: los triángulos **ABE**, **ABF** y **AFG**. El resto de triángulos son semejantes a algunos de éstos y no aportan información adicional. Finalmente hay cuatro segmentos diferentes en estos triángulos que llamaremos:

$$\overline{BE} = a,\ \overline{AB} = \overline{AE} = b,\ \overline{AF} = \overline{BF} = \overline{AG} = c\, y\, \overline{GF} = d$$

Las longitudes de estos segmentos cumplen que $a > b > c > d$.

Consideremos cada uno de estos tres triángulos por separado y apliquemos el teorema del seno.

Triángulo ABE

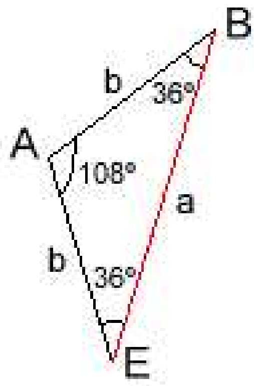


Figura 2.14: Triángulo ABE

$$\frac{a}{sen\,108^o} = \frac{b}{sen\,36^o} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{sen\,108^o}{sen\,36^o}$$

Triángulo ABF

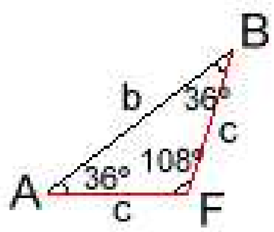


Figura 2.15: Triángulo ABF

$$\frac{b}{sen\,108^o} = \frac{c}{sen\,36^0} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{sen\,108^o}{sen\,36^o}$$

Triángulo AFG

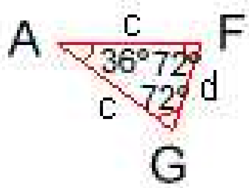


Figura 2.16: Triángulo AFG

$$\frac{c}{sen\,72^o} = \frac{d}{sen\,36^o} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{sen\,72^o}{sen\,36^o} = \frac{sen\,108^o}{sen\,36^o}$$

(ver nota al pie [7])

En consecuencia podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{sen\,108^o}{sen\,36^o} = 1'618033988...$$

Es decir, una vez ordenadas las longitudes de los cuatro segmentos de mayor a menor, la razón entre cada una de ellas y la siguiente es constante e igual a nuestro número de oro. Tomando la primera de las proporciones, teniendo en cuenta que $c = a - b$ y haciendo $b = 1$:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a-1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(el número de oro)

Luego dos de estos segmentos consecutivos cumplen la proporción áurea. Por tanto:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{sen\,108^o}{sen\,36^o}$$

2.4.3. Potencias del número áureo

$\phi^0 = 0 + 1 = 1 + 0$
$\phi^1 = 0 + \phi = 1 + \frac{1}{\phi}$
$\phi^2 = 1 + \phi = 2 + \frac{1}{\phi}$
$\phi^3 = 1 + 2 \cdot \phi = 3 + \frac{2}{\phi}$
$\phi^4 = 2 + 3 \cdot \phi = 5 + \frac{3}{\phi}$
$\phi^5 = 3 + 5 \cdot \phi = 8 + \frac{5}{\phi}$
$\phi^6 = 5 + 8 \cdot \phi = 13 + \frac{8}{\phi}$
$\phi^7 = 8 + 13 \cdot \phi = 21 + \frac{13}{\phi}$
.....

Y así sucesivamente. Observamos que cada potencia de ϕ (desde la tercera, la de exponente 2, en adelante es suma de las dos potencias que le preceden).

2.5. La sucesión de Fibonacci

Consideremos la siguiente sucesión de números:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...\}$$

Cada número, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos que le preceden. Esta sucesión es llamada sucesión de Fibonacci[8]

La sucesión de Fibonacci presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo las enuncio en casos particulares (aunque se cumplen en general). Considérese la siguiente tabla 2.2:

- Si sumas los cuatro primeros términos y le sumas 1 te sale el sexto. Si sumas los cinco primeros términos y le sumas 1 te sale el séptimo. Esto es: $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 1 = f_6$ y $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + 1 = f_7$.

[7] Como $72^o = 180^o - 108^o$, resulta, al ser suplementarios que: $sen\,72^o = sen\,108^o$.

[8] Es el sobrenombre con el se conoció al rico comerciante Leonardo de Pisa (1170-1240). Viajó por el norte de Africa y Asia y trajo a Europa algunos de los conocimientos de la cultura árabe e hindú. Entre otros el sistema de numeración arábigo (el que usamos) frente al romano.

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Cuadro 2.2: Los catorce primeros términos de la sucesión de Fibonacci

- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición impar te sale el sexto término. Si sumas los cuatro primeros términos que ocupan posición impar sale el octavo término. Esto es: $f_1 + f_3 + f_5 = f_6$ y $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 = f_8$.
- Si sumas los tres primeros términos que ocupan posición par y le sumas 1 te sale el séptimo. Si sumas los cuatros primeros términos que ocupan posición par y le sumas 1 te sale el noveno. Esto es: $f_2 + f_4 + f_6 + 1 = f_7$ y $f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + 1 = f_9$.
- Además: $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$.
- Veamos qué ocurre si dividimos dos términos consecutivos (siempre el mayor entre el menor) de dicha sucesión:

  $1 : 1 = 1$

  $2 : 1 = 2$

  $3 : 2 = 1'5$

  $5 : 3 = 1'\hat{6}$

  $8 : 5 = 1'6$

  $13 : 8 = 1'625$

  $21 : 13 = 1'6153846...$

  $34 : 21 = 1'6190476...$

  $55 : 34 = 1'6176471...$

  $89 : 55 = 1'6181818...$

Al tomar más términos consecutivos de la sucesión y hacer su cociente nos acercamos cada vez más a ϕ.

$$L = lim\,\frac{f_n}{f_{n-1}} = lim\,\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = lim\left(1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}\right) = 1 + lim\,\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{L}$$

Por tanto: $L = 1 + \frac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \phi$.

- La íntima relación existente entre la sucesión de Fibonacci y la razón áurea queda de manifiesto en la siguiente fórmula explícita para el n-ésimo término de Fibonacci:

  $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ (ver nota al pie núm. [9])

[9] Esta expresión da exactamente el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (al desarrollarla, las $\sqrt{5}$ se cancelan), pero para números f_n de lugar muy avanzado es fastidiosa de utilizar, si bien pueden conseguirse buenas aproximaciones mediante logaritmos. Otra fórmula mucho más sencilla para calcularlo consiste en dividir entre la $\sqrt{5}$ la n-ésima potencia de ϕ y redondear el número obtenido al entero más cercano. Es decir: $f_n = E\left[\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}\right]$.

Capítulo 3

El número de oro en el arte, el diseño y la naturaleza

3.1. El número de oro en el arte y en el diseño

Con todo lo visto hasta ahora puede parecer que el número de oro es sólo eso: un número.

Pero ...

Figura 3.1: El Partenón

¿Estará aquí ϕ?

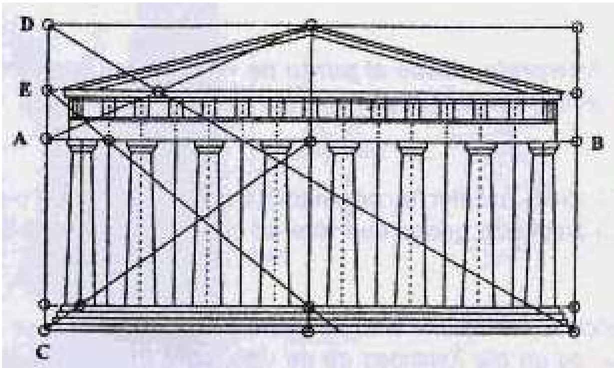


Figura 3.2: Alzado de El Partenón

En la figura 3.2 se puede comprobar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \phi$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \phi$ y también que $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \phi$.

Hay un precedente a la cultura griega donde aparece donde también apareció el número de oro: en la gran pirámide de Keops, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es $2 \cdot \phi$.

Figura 3.3: Pirámide de Keops

Esta pirámide tiene cada una de sus caras formadas por dos medios triángulos áureos: la más aparente, aunque no la única, relación armónica identificable en el análisis de las proporciones de este monumento funerario en apariencia simple.

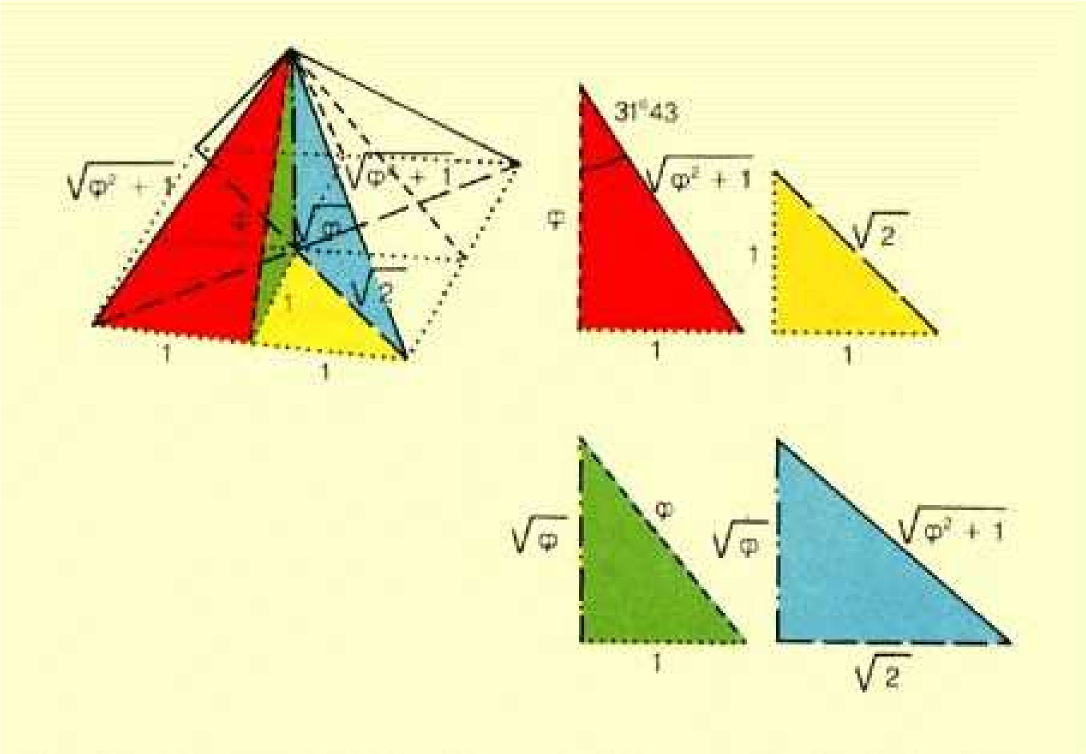


Figura 3.4: Detalle de la pirámide de Keops

Ya vimos que el cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo. En un pentágono regular está basada la construcción de la **Tumba Rupestre de Mira** en Asia Menor.

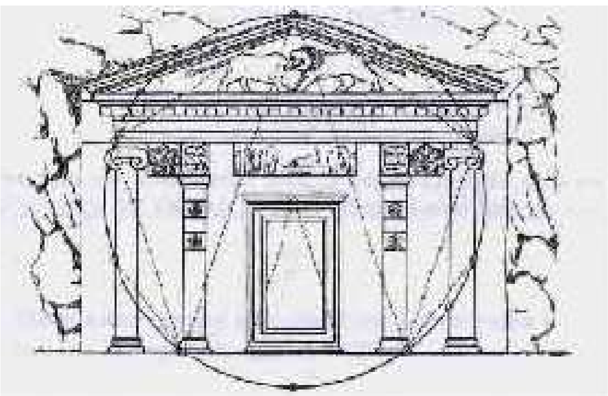


Figura 3.5: Tumba Rupestre de Mira

Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron los griegos y los romanos, las plasmó en el siguiente dibujo3.6 **Leonardo da Vinci.** Sirvió para ilustrar el libro "La Divina Proporción" de **Luca Pacioli** editado en 1509. En dicho libro se describen cuáles han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90 grados con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

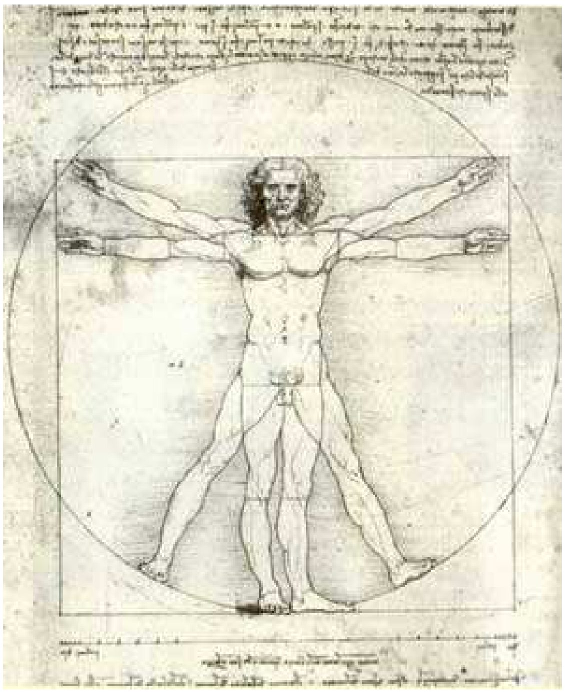


Figura 3.6: Dibujo de Leonardo da Vinci

En el cuadro de **Dalí** "Leda Atómica" 3.7, pintado en 1949, el autor sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por **Dalí** basado en el pentagrama místico pitagórico.

El templo de Ceres en Paestum (460 a.C.) tiene su fachada contruida siguiendo un sistema de triángulos áureos, al igual que los mayores templos griegos, relacionados, sobre todo, con el orden dórico.

Figura 3.7: Leda Atómica

Figura 3.8: Templo de Ceres

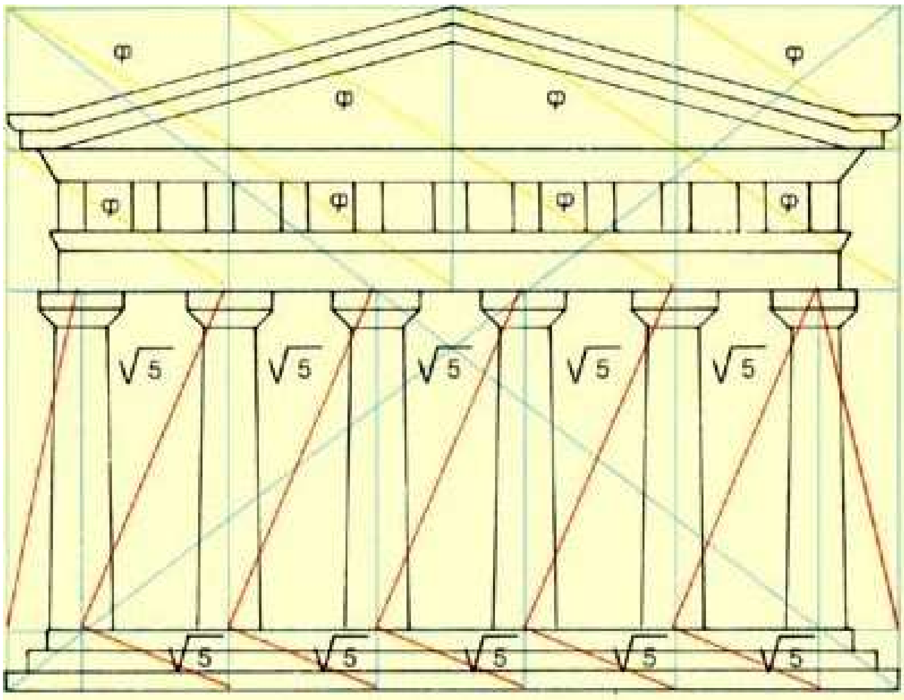


Figura 3.9: Alzado del templo de Ceres

Otros ejemplos en el arte donde podemos encotrar relaciones basadas en la sección áurea son:

- Hermes con Dionisio niño

Hermes de **Praxíteles** (390 - 330 a.C)

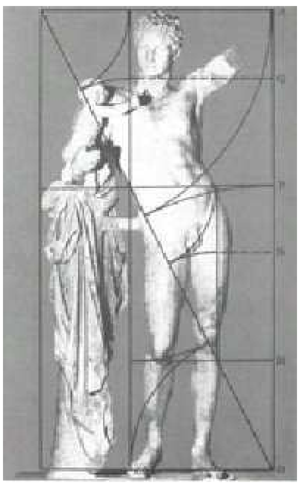


Figura 3.10: Hermes con Dionisio niño

- Venus de Milo

Respeta la sección áurea aunque la aplica un poco más libremente.

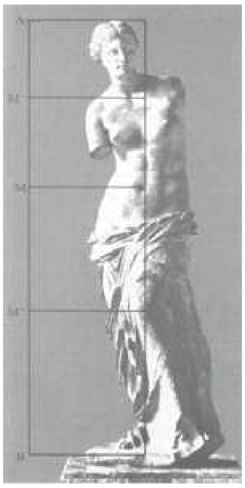


Figura 3.11: Venus de Milo

- Catedral de Salamanca

Figura 3.12: Catedral de Salamanca

- Cuadro ”Las Meninas”

Figura 3.13: Las Meninas

- Cuadro ”La Gioconda”

Figura 3.14: La Gioconda

En el siglo XX el arquitecto **Le Corbusier** basó su sistema de proporciones humanas (el modulor) en el número áureo.

- La altura de la persona (183) entre la altura a la que está el ombligo del suelo (113).
- La altura de la persona con el brazo levantado (226) entre la altura a la que está el brazo puesto en horizontal (140).

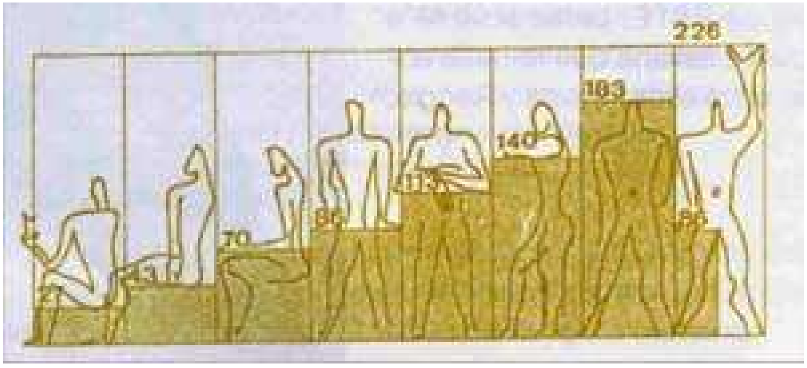


Figura 3.15: Sistema de proporciones de Le Corbusier

- La altura a la que está el brazo puesto en horizontal (140) entre la altura a la que se encuentra el punto de apoyo de la mano (86).

El número áureo no sólo lo encontramos en las antiguas construcciones y objetos de arte. Diariamente manejamos objetos en los cuales se ha tenido en cuenta las proporciones áureas para su elaboración. Por ejemplo, la mayoría de las tarjetas de crédito así como nuestro carnet de identidad tienen la proporción de un rectángulo áureo. También lo podemos encontrar en las cajetillas de tabaco, construcción de muebles, marcos para ventanas, camas, etc.

Figura 3.16: Objetos cotidianos donde aparece la proporción áurea

3.2. El número de oro en la Naturaleza

Ya hemos visto la relación de la sucesión de Fibonacci con nuestro número de oro.

Pues bien, la sucesión de Fibonacci es la pauta que siguen determinados fenómenos de la Naturaleza. Puede aprovecharse para explicar el crecimiento de las hojas a lo largo del tallo de una planta o el número de pétalos de algunas flores; por ejemplo, el lirio tiene tres y las margaritas o girasoles suelen contar con 13, 21, 34, 55 o bien 89.

Figura 3.17: Vista desde el tallo de la Passiflora Incarnata

La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo $ABCD$ y le sustraemos el cuadrado $AEFD$ cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo resultante $EBCF$ es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado $EBGH$, el rectángulo resultante $HGCF$ también es áureo. Este proceso se puede seguir indefinidamente. obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una *espiral logarítmica* (ver figura 3.18).

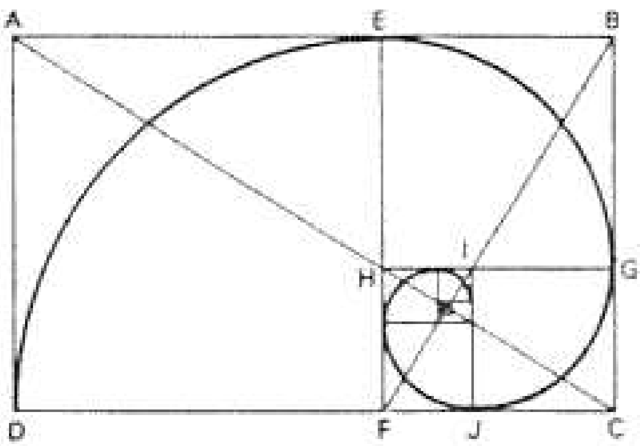


Figura 3.18: La espiral logarítmica

Esta curva ha cautivado por su belleza y propiedades a matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante).

Obsérvese, por ejemplo, la espiral logarítmica en el Nautilus o en la forma de una piña con piñones (ver figura 3.19).

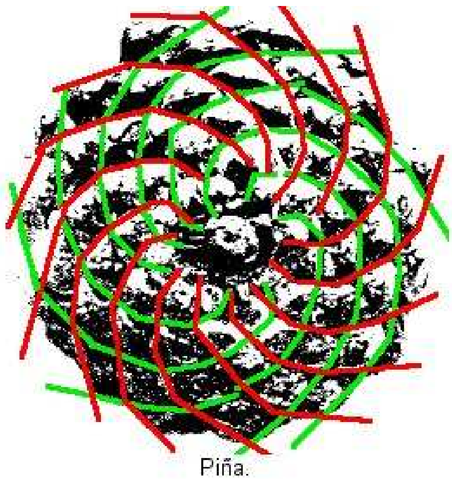


Figura 3.19: Nautilus y piña con piñones

En el cuerpo humano el número áureo aparece en muchas medidas: la relación entre las falanges de los dedos es el número áureo, la relación entre la longitud de la cabeza y su anchura también es éste número.

Figura 3.20: Falanges de las manos

El número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano nos conduce a la sucesión de Fibonacci y, por tanto, al número áureo.

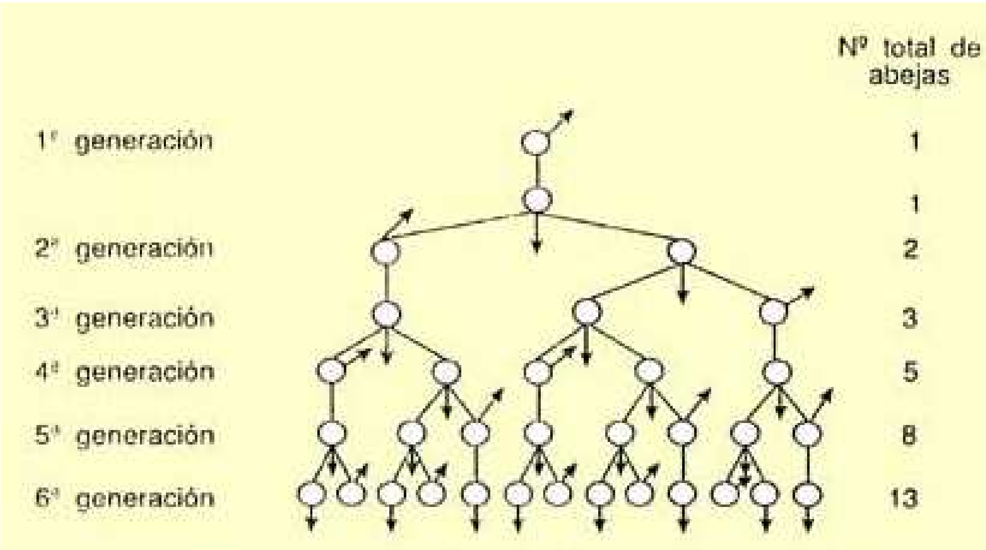


Figura 3.21: Genealogía de las abejas

Según se sabe, una vez inseminada la abeja reina por un zángano (de otro enjambre), aquella se queda en su colmena y ya no sale más, dedicándose a la puesta de huevos que ella misma va fecundando o no, dando origen así a abejas obreras, o bien reinas, en el primer caso y machos o zánganos en el segundo. Si observamos el árbol genealógico (ver figura 3.21) de un zángano, podemos ver como el número de abejas en cada generación es uno de los términos de la sucesión de Fibonacci.

En el reino vegetal la sucesión de Fibonacci hace su aparición más llamativa en la implantación espiral de las semillas en ciertas variedades de girasol. Hay en ellas dos haces de espirales logarítmicas: una en sentido horario y otra en sentido antihorario, como muestran las espirales sombreadas de la figura 3.22. Los números de espirales son distintos en cada familia, y por lo común, número de Fibonacci consecutivos. Los girasoles de tamaño medio suelen contener 34 y 55 espirales, pero hay flores gigantescas que alcanzan valores de hasta 89 y 144. En la sección de cartas a la redacción de *The Scientific Monthly* (noviembre de 1951) el geólogo Daniel T. O'Connell y su esposa dijeron haber encontrado en su granja de Vermont un girasol monstruo, con 144 y 233 espirales.

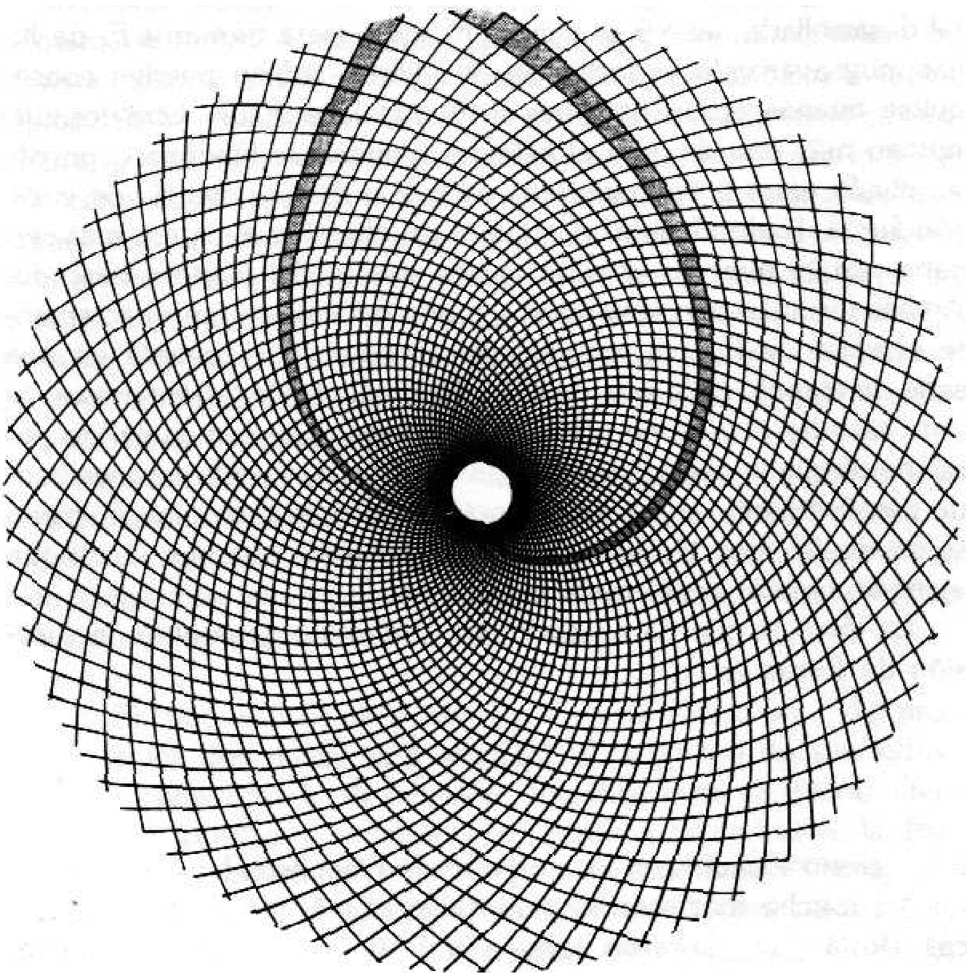


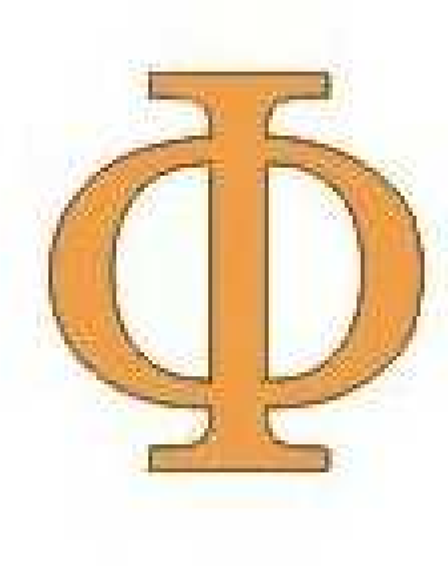
Figura 3.22: Girasol gigante que contiene 55 espirales en sentido antihorario y 89 en sentido horario.

En la siguiente foto se observa el girasol verdadero al que hacemos referencia (ver figura 3.23):

Figura 3.23: Girasol con 55 y 89 espirales

La siguiente fotografía es de una coliflor corriente. Nótese que si seguimos su contorno podríamos dibujar un pentágono. Observando cuidadosamente podremos ver un punto central donde las flores son más pequeñas. Si miramos de nuevo podremos ver que las flores se organizan en espirales alrededor de ese centro en ambas direcciones.

Figura 3.24: Coliflor común



Bibliografía

[1] LIBROS

- *R. Torija.* "Arquímedes. Alrededor del círculo". Ed. Nivola. Madrid 1999.
- *Matila C. Ghika.* "Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes". Ed. Poseidon. Barcelona 1983.
- *D'Arcy Thompson.* "Sobre el crecimiento y la forma". H. Blume Ediciones. Madrid 1980.
- *J. Rey Pastor y J. Babini.* "Historia de la Matemática". Barcelona 1984.
- *H. Steinhaus.* "Instantáneas Matemáticas". Ed. Salvat. Barcelona 1984.
- *M. Morata y J.C. Orero.* "La circunferencia y otras curvas especiales". Actas 7as JAEM. Madrid 1995. FESPM.
- *M. J. Luelmo.* "Geometría en la Naturaleza". MEC. 1987.
- *Chris Pritchard.* "The Changing Shape of Geometry: Celebrating a Century of Geometry and Geometry Teaching". Cambridge. 2003.
- *K & V Atanassova and others.* "New Visual Perspectives on Fibonacci Numbers". World Scientific. 2002.
- *Mauricio Donoso.* "La sección áurea y el número de oro; estudio en el cuerpo humano". Universidad Santiago de Chile. 1995.
- *Denis Guedj.* "El imperio de las cifras y los números". Ediciones Grupo Zeta.
- *H. E. Huntley.* "The Divine Proportion - A Study in Mathematical Beauty".

Bibliografía

[1] Webs

- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/phi2DGeomTrig.html (Excelente página para estudiar el número áureo y su implicación en la Geometría. Contiene numerosos ejemplos de figuras geométricas en las que aparece este número).
- http://ca.dir.yahoo.com/Science/Mathematics/Numerical_Analysis/Numbers/Specific_Numbers/Phi (Es una página de Yahoo que enlaza con numerosas páginas web referidas al número áureo).
- http://www.geocities.com/capecanaveral/station/8228/ (Interesante página en inglés que relaciona el número áureo con el Arte, la Bilogía, los números de Fibonacci y el arte antiguo. Se completa con unos interesantes links y bibliografía).
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html (Completa página sobre la sucesión de Fibonacci con ejemplos de aplicación en la Biología y su relación con el número áureo).
- http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae.html (En esta página se relacionan los números de Fibonacci y el número áureo. Se puede obtener por enlace de la anterior. También se pueden realizar enlaces para relacionarlos con el Arte o la Música).
- http://ca.dir.yahoo.com/Science/Mathematics/Numerical_Analysis/Numbers/Specific_Numbers/Pi/ (Se trata de una página de Yahoo que enlaza con numerosas páginas web sobre el número ϕ).
- http://www.formacion.pntic.mec.es/web_espiral/ (El fantástico mundo de las espirales).
- http://www.ga.k12.pa.us/academics/US/Math/Geometry/GEOMPROJ/Meredith/ (Mucha información sobre la sucesión de Fibonacci, el rectángulo de oro y ϕ).
- http://www.nalejandria.com/archivos-curriculares/matematicas/nota-013.htm
- http://personal4.iddeo.es/nanisg/oro.htm
- http://rt000z8y.eresmas.net/El%20numero%20de%20oro.htm#5
- http://www.mathsoft.com/mathresources/constants/wellknown/article/0,,1971,00.html (Excelente página de Steven Finch sobre la sección áurea).
- http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jeon.Kyungsoon/writeup5/writeup5.html (Kyongsoon Jeon de la Universidad de Georgia tiene un pequeño pero buen artículo sobre Phi y la serie de Fibonacci usando una hoja de cálculo).
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/recursos_informaticos/concurso02/alumnado/ (Página de Averroes que trata sobre el número de oro).

- http://www.formacion.pntic.mec.es/web_espiral/naturaleza/vegetal/fibonacci/fibonacci.htm
(Página del MEC que trata sobre la sucesión de Fibonacci en la Naturaleza).

Bibliografía

[1] Vídeos

- *A. Pérez Sanz.* "El mundo de las espirales. Serie Más por menos". RTVE. 1996.
- *A. Pérez Sanz.* "Fibonacci. La magia de los números. Serie Más por menos". RTVE. 1996.
- *A. Pérez Sanz.* "El número áureo. Serie Más por menos". RTVE. 1996.
- *M. Emmer.* "Espirales". Mare Nostrum Audiovisuales. 1990.