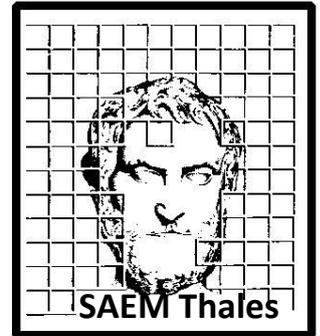




VI CONCURSO DE OTOÑO DE MATEMÁTICAS (CO+)



Preparatorio para la 52^a Edición de la
Olimpiada Matemática Española

Sevilla, viernes 30 de octubre de 2015

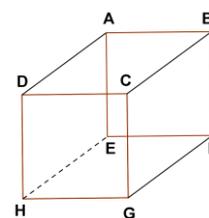
Facultad de Matemáticas y
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

LEE ATENTAMENTE:

- Tacha con una **X** la letra de la opción que creas correcta. Si te equivocas, rodea la **X** con un círculo **O** y tacha a continuación la solución que consideres correcta.
- Cada respuesta correcta te aportará 5 puntos, cada respuesta en blanco 2 puntos y cada respuesta errónea 0 puntos.
- Duración de la prueba: 2 horas.
- Normas y Consejos:
 - * No te olvides de poner tu nombre completo en cada hoja.
 - * Los folios en blanco que te facilitamos son para usar exclusivamente como borrador para hacer cuentas, dibujos, etc.
 - * Es difícil contestar a todas las preguntas en el tiempo indicado, concéntrate en las que veas más asequibles y, cuando las hayas contestado, inténtalo con las demás.
 - * Procura no contestar al azar, pues las respuestas incorrectas no te dan ningún punto.

Prueba de 1º y 2º de Bachillerato

Apellidos Nombre



1.- En el cubo ABCDEFGH, apoyado sobre la cara EFGH, los vértices A, B, C y D están en la misma arista que E, F, G y H respectivamente. ¿Cuál es el coseno del ángulo GEC?

- A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.- Se tira un dado cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan cuatro números distintos?

- A) $\frac{5}{18}$ B) $\frac{1}{54}$ C) $\frac{5}{108}$ D) $\frac{1}{144}$ E) $\frac{24}{216}$

3.- Se tiene la función $y = \frac{x+2}{x+1}$, definida en el intervalo $(-1, +\infty)$. Indica cuál es la función que tiene la gráfica simétrica de ésta respecto de la recta $y=x$.

- A) $y = \frac{-x+2}{-x+1}$ B) $y = \frac{x+1}{x+2}$ C) $y = \frac{2-x}{x-1}$ D) $y = -\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ E) $y = \frac{x-1}{x-2}$

4.- Si log representa el logaritmo decimal (base 10), la suma

$$\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \dots + \log \frac{98}{99} + \log \frac{99}{100} \text{ es igual a:}$$

- A) -1 B) 0 C) 1 D) -2 E) 100

5.- Los valores que puede tomar la expresión $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ cuando n recorre los números enteros positivos son:

- A) 0, 1, 2 y 3 B) 0, 1 C) 0, 1 y 2 D) 1 E) 2

(Indicación: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x)

6.- Sea ABC un triángulo equilátero de lado 4. Sean P, Q y R tres puntos exteriores al triángulo y situados respectivamente sobre los lados AB, BC y CA, contiguos a B, C y A respectivamente. Si $BP=CQ=AR=2$, el área del triángulo PQR es

- A) $10\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{3}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $15\sqrt{3}$ E) $13\sqrt{3}$

7.- Si $\frac{x+y}{x-y} = \frac{6}{5}$, ¿cuánto vale $\frac{y^2}{x^2}$?

- A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{1}{121}$ C) 121 D) 11 E) $\frac{36}{25}$

8.- La última cifra (unidades) de 11^{2015} es evidentemente el 1, la penúltima (decenas) es 5, pero ¿cuál es la antepenúltima (centenas)?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

9.- ¿Cuántos pares ordenados de números enteros (x, y) satisfacen la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$?

(Se admiten soluciones negativas).

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Ninguna de las anteriores

10.- ¿Cuál es el resto de dividir 3^{2015} entre 21?

- A) 3 B) 9 C) 8 D) 16 E) 12

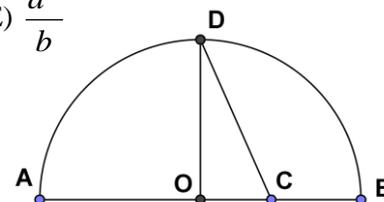
Apellidos Nombre

11.- En una caja hay dos bolas rojas, dos verdes y dos amarillas, todas de igual tamaño. Alicia coge al azar dos bolas de la caja; luego Bea coge, también al azar, otras dos de las restantes y, finalmente, Carlos coge las dos últimas. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas que coge Carlos sean del mismo color?

- A) 1/10 B) 1/6 C) 1/5 D) 1/3 E) 1/2

12.- En la figura adjunta, O es el centro de la semicircunferencia y OD es perpendicular al diámetro AB. Si $AC = a$ y $CB = b$, ¿cuánto vale DC?

- A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ D) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2}}$ E) $\frac{a^2}{b}$



13.- Yo vivía en Siracusa hace más o menos 22 siglos; calculé el área de un segmento de parábola y otras muchas cosas; he probado que el área lateral del cilindro circunscrito a una esfera es igual al área de esa esfera; una cierta espiral lleva mi nombre..., pero sobre todo, se sabe que dije: “Dadme un punto de apoyo y ...” ¿Quién soy?

- A) Alejandro Magno B) Apolonio C) Arquímedes D) Euclides E) Pitágoras

14.- El número 99 tiene la propiedad de que hay exactamente tres parejas de cuadrados perfectos (cuadrados de números enteros) que difieren en 99: $(10^2, 1^2)$, $(18^2, 15^2)$ y $(50^2, 49^2)$.

¿Cuántas parejas de cuadrados perfectos difieren en 98?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15.- El valor de $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ es:

- A) π B) $\arctg \frac{5}{6}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\arctg \frac{1}{6}$ E) $\frac{\pi}{4}$

16.- a y b son dos números no nulos tales que $a - b = \frac{a+b}{7}$ y $a - b = \frac{ab}{24}$.

¿Cuál es el producto de estos dos números?

- A) 40 B) 42 C) 44 D) 46 E) 48

17.- Si $n = 10a + b$ con a y b enteros tales que $1 \leq a \leq 9$ y $0 \leq b \leq 9$, sea $f(n) = a + b + ab$,

¿cuántos enteros positivos n de dos cifras verifican que $f(n) = n$?

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 15

18.- Si la parábola $y = x^2 + 8x + k$ tiene su vértice en el eje de abscisas, el valor de k es:

- A) 0 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

19.- En una determinada prueba la puntuación media de las chicas fue de 83 puntos, mientras que la de los chicos fue de 71 puntos. Si la puntuación media de todos los participantes (chicos y chicas) fue de 80 puntos, ¿qué porcentaje de los participantes eran chicas?

- A) 60% B) 65% C) 70% D) 75% E) 80%

20.- Si la suma de la progresión geométrica decreciente ilimitada $1, \cos^2 \alpha, \cos^4 \alpha, \cos^6 \alpha, \dots$ es igual a 5, ¿cuál es el valor de $\cos 2\alpha$?

- A) 4/5 B) 3/5 C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D) 2/5 E) 1/5