CONEXIONES ENTRE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL. EXPLORACIÓN DEL SENTIDO FÍSICO

Dolores Flores Crisólogo. *Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero. México. cdolores2@gmail.com*

RESUMEN

El presente, constituye el reporte de una investigación que tiene como objetivo el de explorar las conexiones que hacen los estudiantes, entre el uso de la derivada y la integral, cuando se les plantean problemas relacionados con la física. En matemáticas esas conexiones están cifradas en el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) y son conexiones de reversibilidad. Sin embargo asumimos, como hipótesis, que esas conexiones están escasamente presentes en los estudiantes de cálculo, sobre todo cuando se les plantean problemas relacionados con la práctica que requieren de su utilización consciente. Esto puede ser indicativo de los escasos significados generados en la educación matemática acerca del TFC y sus usos en la solución de problemas.

Nivel educativo: Preuniversitario y Universitario.

1. INTRODUCCIÓN.

La investigación de la cual damos cuenta en este documento ha adoptado como objeto de estudio las conexiones entre los conceptos esenciales del Cálculo: la derivada y la integral. Desde el punto de vista histórico estos conceptos se desarrollaron de manera separada. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes. El segundo concepto tuvo su origen en el problema del cálculo de áreas de superficies con lados curvos. Empero las conexiones entre el problema de las tangentes y el de las áreas se vino a descubrir en 1690 a través de los trabajos de Barrow y Newton. Y la conexión entre ambos conceptos descubierta radicaba justamente en que son procesos inversos, esta conexión está cifrada justamente en el TFC. En este se unifican dos conceptos aparentemente inconexos que fueron desarrollados aisladamente durante casi dos mil años.

Desde el punto de vista educativo, la relación entre la derivada y la integral se supone es aprendida por los estudiantes desde el bachillerato. Cuando transitan de los procesos de derivación a los de integración. Y esta transición se hace posible, de acuerdo a los textos usuales de cálculo de bachillerato, a través de la idea de antiderivada. Pero esa transición, suponemos, puede ser artificiosa y escasa de significado, pues hace énfasis más en los procesos algorítmicos que en su potencia y utilidad para resolver problemas relacionados con la práctica. Por eso, es aquí donde se ubica el problema de nuestra investigación. En averiguar qué conexiones hacen los estudiantes entre los conceptos de integral y de derivada pero en situaciones o problemas de la práctica donde se necesita utilizar esa conexión.

2. INVESTIGACIONES RELACIONADAS Y EL OBJETIVO.

Son muy escasas las investigaciones relacionadas con el problema central de esta investigación. Sin embargo hay algunas con cierta relación las cuales analizamos a continuación. Alanís y Salinas (2009) señalan que la enseñanza tradicional del Cálculo Diferencial e Integral trae consigo problemas en cuando a su aprendizaje, como: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia las matemáticas. Por otra parte, Sánchez, García y Llinares (2008) reportan que algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente.

Arcos y Sepúlveda (2011) estudian y proponen, desde una perspectiva infinitesimalista, la enseñanza de la diferencial de área en escuelas de ingeniería. Argumentan que para quien se prepara para ejercer profesionalmente la Matemática, el rigor puede resultar irrenunciable, sin embargo, para un estudiante de ingeniería, el énfasis de la formación escolar en cuanto a matemáticas se refiere, debe estar en las aplicaciones y en que estas deben ayudarlo a comprender mejor los conceptos propios de las ciencias de la ingeniería. Por ello proponen recuperar las bondades didácticas del Cálculo de fines del siglo XVII, tomando en cuenta la disponibilidad de los recursos tecnológicos con los que se cuenta actualmente.

Alanís y Soto (2011) muestran que en las últimas décadas han predominado dos enfoques de enseñanza del Cálculo Integral: la formalista y la mecanicista. Y caracterizan a la enseñanza de la integral por: un énfasis en una algoritmia desprovista de significados, conceptualización de la integral basada únicamente en la noción área, falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario, insistencia en la enseñanza formalista, uso de las diferenciales y uso de la tecnología como recurso para salvar las dificultades.

Por su parte, Alanís y Salinas (2009) proponen nuevas formas de enseñanza del cálculo. El nuevo discurso en la enseñanza del Cálculo debe integrar didácticamente, un acercamiento newtoniano con un leibniziano a la génesis del Cálculo, bajo la condición de ofrecer así mayores oportunidades al estudiante para que se apropie de las ideas que subyacen en la construcción de sus nociones y procedimientos, destacando su carácter de herramientas para resolver problemas reales que atañen al estudio del cambio. Por otro, lado Rojas y Cisterna (2010) reportan, tras una revisión bibliográfica, que el problema de la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral es mayor de lo que se pensaba, con la intención de mejorar los resultados cambiaron el orden tradicional de los contenidos, primero integrales y luego derivadas, pero se encontraron que este cambio no mejora los resultados.

Por su parte, Haciomeroglu, Aspinwall y Presmeg (2009), examinan los procesos cognitivos de tres estudiantes de cálculo, al pedirles esbozar la gráfica de la antiderivada dada la gráfica de la derivada de una función (en este caso dan la gráfica de $f'(x) = 1/x$ y piden la gráfica de $f(x)$). Plantean que las estrategias analíticas o visuales utilizadas por los estudiantes conducen a diferentes y algunas veces divergentes interpretaciones de la gráfica de las derivadas. Sin embargo ofrecen ideas de cómo enriquecer el entendimiento de los estudiantes mediante el establecimiento de relaciones reversibles entre las gráficas de funciones y las gráficas de sus derivadas o antiderivada. Sus resultados ilustran la importancia de la flexibilidad y la reversibilidad del pensamiento en la comprensión de la diferenciación y la integración en cálculo.

En un trabajo con similares intenciones que el anterior, realizada por Guerrero (2002) pero con profesores de Bachillerato se explora el comportamiento variacional de funciones elementales, se reporta que al plantearles construir la gráfica de f(x) dada f´(x), los profesores dibujan rectas tangentes en algunos puntos de la gráfica de f´(x), solamente uno de dieciséis profesores logró construir una gráfica aceptable.

Como puede apreciarse, parte importante de las investigaciones revisadas estudian a los conceptos de derivada e integral por separado. Solamente las dos últimas estudian esa relación, pero centran la atención en las gráficas de f´(x) y de f(x) en contextos matemáticos. El trabajo que nos proponemos difiere de los los anteriores en que, nosotros nos proponemos explorar las conexiones entre esos conceptos mediante problemas en contextos relacionados con la práctica (con la física principalmente).

Por tanto nuestro objetivo general consiste en explorar las conexiones que establecen los estudiantes entre los conceptos de derivada e integral en el plano de su aplicación práctica. Para ello planteamos por ejemplo, problemas en el contexto físico del estilo: dada la gráfica de la velocidad de un cuerpo esbozar la gráfica de la posición del mismo o viceversa. Otra de las diferencias con los trabajos revisados radica en que estamos interesados en la búsqueda de todas las conexiones posibles que seguramente fueron generadas por los estudiantes en sus estudios no solo de matemáticas. Hemos encontrado en las validaciones de nuestros instrumentos por ejemplo, que los estudiantes utilizan las fórmulas de la velocidad o aceleración aprendidas en sus clases de Física, también se nota que la utilización de estrategias analíticas predomina en estudiantes con buena formación matemática y que las estrategias visuales son poco utilizadas.

3. MARCO CONCEPTUAL.

Este trabajo se fundamenta en dos conceptos esenciales: la reversibilidad y el sentido o significado asociados al TFC. Serrano y Calvo (1991), plantean que la reversibilidad es un proceso temporal que hace referencia a la fusión, en un acto único, de las anticipaciones y de las retroacciones, que se produce merced a las progresivas diferenciaciones y coordinaciones graduales de los esquemas cognitivos. Estos autores mencionan tres argumentos posibles que permiten dar cuenta de la reversibilidad de las estructuras: la identidad u operación idéntica; la inversión o la negación que es la reversibilidad característica de las operaciones de clase (relaciones de equivalencia) y la compensación o reciprocidad que es la reversibilidad propia de las relaciones de orden.

Por otra parte Carbó (1999) define a la reversibilidad como una condición de todas las formas del pensamiento lógico, ya sea formación de conceptos, solución de problemas, inducción o deducción. Y explica que hay dos variantes: reversibilidad negativa y reversibilidad de reciprocidad. La reversibilidad negativa se alcanza deshaciendo una acción y realizando una acción contraria a la anterior. Reversibilidad de reciprocidad se aplica sólo a las relaciones y consiste en ejecutar acciones que compensen una condición anterior sin necesidad de deshacerla.

Goanac´h y Golder (2005) definen la reversibilidad como la capacidad de ejecutar mentalmente una misma acción en los dos sentidos de su recorrido, estando consciente de que se trata de la misma acción. García y Rodríguez (2012), plantean que la reversibilidad es la característica más definida de la inteligencia. Si el pensamiento es reversible, entonces puede seguir el curso del razonamiento hasta el punto del cual partió. Reversible significa poder invertir las propias acciones a fin de establecer su estado inicial. Por otra parte Woolfolk (1996) define a la reversibilidad como la capacidad de pensar a través de una serie de pasos y luego invertir mentalmente los pasos y regresar hasta el punto de inicio; también se le llama pensamiento reversible.

Al analizar éstas definiciones, consideramos que la definición que mejor se adapta a nuestro trabajo de investigación es la definición dada por Woolfolk. La reversibilidad en el plano matemático se concreta en la conexión entre la derivación y la integración, uno es el proceso inverso del otro y ésta conexión es justamente la establecida en el TFC.

Por otra parte el sentido en este trabajo se toma como sinónimo de significado. Y éste se adopta de los planteamiento de Ausubel (1995, p. 542) el cual lo define como: contenido diferenciado y agudamente articulado de conciencia que se desarrolla como un producto del aprendizaje simbólico significativo que puede ser evocado por un símbolo o grupo de símbolos después de que los últimos han estado relacionados de manera sustancial y no arbitraria con la estructura cognoscitiva. Esta definición es la base del aprendizaje significativo, el cual reside en que las ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitaria se entiende que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición.

Una matemática con sentido por lo tanto es aquélla que relaciona los conceptos, procedimientos y teoremas matemáticos con los problemas de la realidad. Pero que éstos aparezcan como recursos para resolver esos problemas, antes de ser estudiados por sí mismos como se hace en la enseñanza tradicional. Por lo tanto una enseñanza consistente del TFC con esta premisa podría iniciar con el planteo y resolución del problema de la determinación de velocidad de un cuerpo en movimiento y viceversa, dada la velocidad de un cuerpo, determinar su posición en cualquier instante.

4. MÉTODO.

La investigación es de corte exploratoria y descriptiva en el sentido de Hernández, Fernández y Baptista (1991). Exploratoria porque se efectúa sobre un tema u objeto poco estudiado, por lo que sus resultados constituyen una visión aproximada de dicho objeto. Descriptiva porque pretendemos caracterizar un fenómeno o situación concreta indicando sus rasgos más peculiares o diferenciadores, particularmente la situación referida a los procesos de conexión entre la derivada y la integral. En términos generales esta investigación se guiará por el siguiente esquema metodológico: revisión y análisis de libros de texto, diseño y validación del instrumento, aplicación, recolección de datos, procesamieno de la información.

Se analizarán los libros de textos de Cálculo más utilizados por los profesores, con el objetivo de identificar la conexión que utilizan entre la derivada y la integral. Se diseñará un cuestionario de carácter exploratorio como herramienta principal con el objetivo de dar evidencia de las conexiones entre la derivada y la integral que establecen los estudiantes. El instrumento de exploración se aplicará a los estudiantes que ya hayan cursado el Cálculo Diferencial e Integral, complementado con entrevistas y videograbaciones. Posteriormente se realizará el análisis de los resultados obtenidos con miras siempre a la detección de las conexiones o relaciones entre los conceptos esenciales del cálculo.

5. AVANCES.

5.1 LOS TEXTOS

Se revisaron los textos de Cálculo Diferencial e Integral de Leithold (1998); Cálculo: Trascendentes tempranas de Stewart (2007), el Cálculo Infinitesimal de Spivak (1988) y el Calculus de Apostol, Vol. 1 (2005). Estos textos fueron revisados en virtud de que los profesores dicen que son (en una entrevista) los más utilizados y además porque son textos recomendados en los programas de estudio.

En el texto de Leithold, se estudia primero el Cálculo Diferencial (CD) y posteriormente aborda el Cálculo Integral (CI). Los conceptos previos antes de introducir el concepto de derivada son: funciones, límites y continuidad. La derivada se introduce, considerando primero su interpretación geométrica como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función. Otra interpretación que se le da a la derivada es como una tasa de variación (o razón de cambio). Al concluir con el CD, se inicia con el CI estableciendo la antiderivación (como conexión entre ambos) y se define como la operación inversa de la derivación y se explica que la antiderivación o antidiferenciación es el proceso mediante el cual se determina el conjunto de todas las antiderivadas de una función dada y denotan a la antiderivación con el símbolo $\int$.

El texto Stewart, el estudio del CD inicia con límites que se tratan desde los puntos de vistas descriptivo, gráfico, numérico y algebraico; se define el límite en términos de épsilon-delta; se define la continuidad y finalmente se define la derivada de una función. En los siguientes dos capítulos se estudian las reglas de derivación y las aplicaciones de la derivada, donde también se define la antiderivada que resuelve el problema de hallar una función cuya derivada sea una función conocida. Así establece la conexión entre el CD y CI.

En texto de Cálculo de Spivak, inicia abordando el CD y sus temas típicos: funciones, límites, funciones continuas y derivadas. Pasa al tema de las integrales por medio de las sumas de Riemann. Establece la conexión entre la derivada y la integral mediante el TFC.

En el Calculus (Volumen I) de Apostol, presenta primero el estudio del CI que se ocupa del problema de áreas. Define la integral para funciones escalonadas y se abordan las propiedades de la integral de una función escalonada tales como la propiedad aditiva, propiedad homogénea, propiedad de linealidad, entre otras.

Después se estudia la integral de funciones más generales y sus propiedades fundamentales. Antes de iniciar con el CD, se estudia funciones continuas. El estudio del CD que tiene como idea central la noción de derivada. Por último plantea la relación entre la integración y la derivación, donde se estudia la conexión entre estos procesos, por medio del TFC.

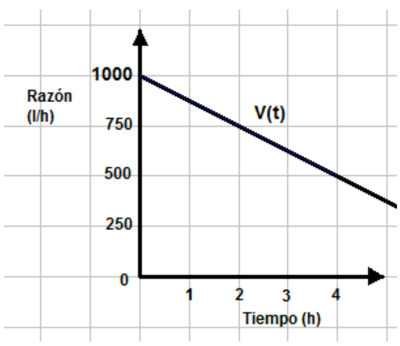
De la revisión de estos textos se puede concluir que son dos las conexiones más usuales entre la derivada y la integral: mediante las antiderivadas y mediante el TFC. Todas las conexiones se dan en el plano matemático y se formalizan mediante el TFC. Excepto los libros más actuales como el de Stewart que se ocupan de plantear y resolver problemas relacionados con las aplicaciones entre la derivada y la integral, en todos los demás priorizan esas relaciones solo en el contexto matemático incentivando la obtención de integrales mediante la utilización de reglas y fórmulas.

5.1 EL INSTRUMENTO DE EXPLORACIÓN.

El instrumento fue diseñado de manera que posibilitara la utilización de la conexión buscada y se pide a los estudiantes que lo resuelvan de varias formas. Se diseñaron cuatro problemas. Nótese que los términos de derivada e integral no son mencionados ni sugeridos para la resolución de los problemas. Se deja en libertad al estudiante para que busque la vía de solución y la plasme en el cuestionario.

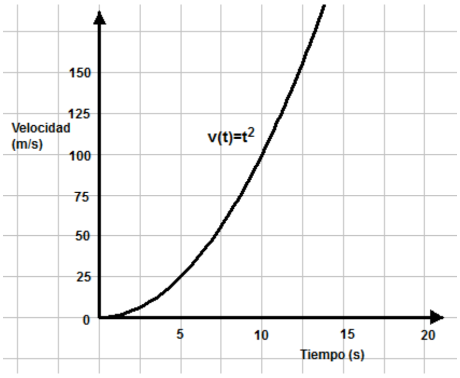
El primer problema se puede resolver si se considera a la razón (y su gráfica) como la derivada de la función y la primitiva como la función cantidad de litros en función del tiempo. Por tanto si se establece la relación de reversivilidad entre la primera como la función derivada y la segunda como su primitiva, se puede inferir que para obtener esta última se requiere de la integración. O incluso se puede resolver si se hace una conexión entre la integral y el cálculo del área bajo curvas (en este caso es recta) sin necesidad de obtener la fórmula de la función derivada. A continuación se transcribe el Problema 1.

> Problema 1. El agua se fuga de un tanque a una razón v(t) medida en litros/hora. La Gráfica 1 ilustra esta situación. ¿Qué cantidad de agua se fugó en las primeras cuatro horas?

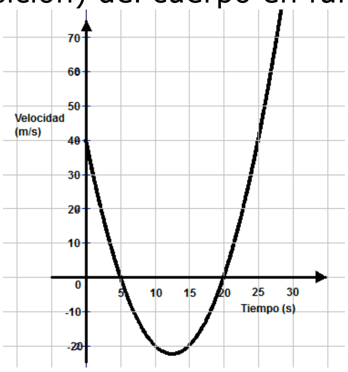


En el segundo y tercer problema se da la velocidad y se pide la gráfica de la función distancia en relación al tiempo. Es decir, dada la gráfica y la fórmula de la función derivada se pide esbozar la gráfica de la primitiva. Se puede resolver si se establece la conexión entre la velocidad como derivada y la función de la distancia con respecto del tiempo como la primitiva. Nótese que en el segundo problemas se da la fórmula de la función velocidad para facilitar el cálculo y propiciar el uso de estrtegias analíticas en cambio en el tercer problema se pide la gráfica de la primitiva para propiciar la utilización estrategias visuales que toman a la gráfica como recurso central. El Problema 2 y 3 fueron redactados en los siguientes términos.

Problema 2. Un coche acelera uniformemente los primeros 15 segundos. Si la velocidad del vehículo en función del tiempo es la representada en la Gráfica 2. ¿Qué distancia recorre los primeros 10 segundos?



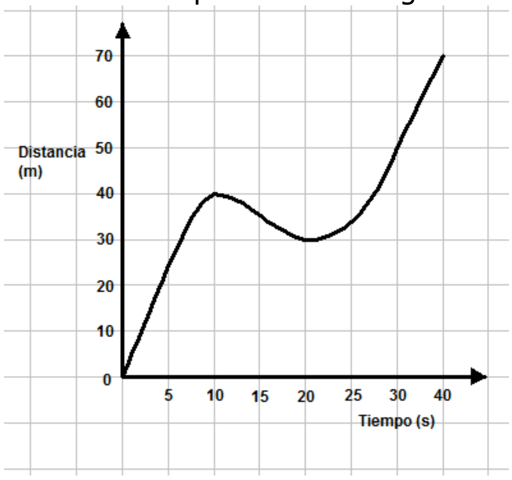
Problema 3. La velocidad del movimiento de un cuerpo en función del tiempo es la representada en la Gráfica 4. Esboce la gráfica del desplazamiento (o posición) del cuerpo en función del tiempo.



El cuarto problema es distinto de los demás porque en él se trata de explorar la conexión entre la función distancia vs tiempo y la velocidad. Si se establece la relación de analogía entre la función primitiva y su derivada el problema puede ser resuelto. La distancia es la primitiva y la velocidad la derivada. En este problema se induce la utilización de herramientas geométricas y visuales asociadas a las pendientes de la curva, estableciendo relación entre el comportamiento de la curva de las distancias y las pendientes de sus tangentes. Estas últimas pueden ser estimadas y graficadas representando así la gráfica de la velocidad solicitada. También se pueden utilizar la técnica de la graficación covariacional propuesta por Dolores y Salgado (2009) estimando los cambios de distancia en relación a los cambios de tiempo, mediante pequeños triángulos rectángulos determinados por los Δs (cambios de distancia) en relación a los cambios Δt (incrementos de tiempo). El Problema 4 se transcribe a continuación.

Gráfica 4

Problema 4. La Gráfica 4 representa la distancia recorrida por un cuerpo en función del tiempo. Esboce la gráfica de su velocidad respecto al tiempo.



En esto días estamos terminando la validación del instrumento de exploración y de inmediato procederemos a la aplicación. Esperamos contar ya con resultados acerca de la búsqueda de las conexione entre los dos conceptos fundamentales del cálculo antes de que termine el año en curso.

REFERENCIAS.

ALANÍS, J. Y SALINAS, P. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(3), 355-382*.*

ALANÍS, J. Y SOTO, E. (2011). La integral de funciones de una variable: Enseñanza actual. *Revista: El Cálculo y su Enseñanza, vol. 3,* 1-6*.*

APOSTOL, T. (2005). *Cálculus. Volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* México: Reverté.

ARCOS, J. Y SEPÚLVEDA, D. (2011). La diferencial de área. Una perspectiva infinitesimalista. *Revista: El Cálculo y su Enseñanza vol. 3,* 18-31.

AUSUBEL, D., NOVAK, J. Y HANESIAN, H. (1995). *Psicología Educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

CARBÓ, E. (1999). *Manual de Psicología aplicada a la empresa, volumen 2.* España: Granica.

DOLORES, C. Y SALGADO, G. (2009). Elementos para la graficación covariacional. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas vol. 72,* 63-74.

GARCÍA, Y. Y RODRÍGUEZ, A. (2012). Reversibilidad y anticipación en situaciones de convivencia escolar. *Plumilla Educativa:* 203-222.

GOANAC´H, D. Y GOLDER, C. (2005). *Manual de Psicología para la enseñanza.* México: Siglo XXI Editores.

GUERRERO, L. (2002). *Un estudio exploratorio acerca de las concepciones que referentes al comportamiento variacional de funciones elementales tienen los profesores de Bachillerato* (Tesis de Maestría, no publicada). Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Pachuca, Hidalgo. Recuperado desde: http://www.uaeh.edu.mx/docencia/Tesis/icbi/maestria/documentos/Un%20estudio%20exploratorio.pdf

HACIOMEROGLU, E. S., ASPINWALL, L. Y PRESMEG, N. (2009). The role of reversibility in the learning of the calculus derivative and antiderivative graphs. In Swars, S. L., Stinson, D. W., & Lemons-Smith, S. (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 5, (pp. 81-88). Atlanta, GA: Georgia State University.

HERNÁNDEZ, R., FERNÁNDEZ, C. Y BAPTISTA, P. (1991). *Metodología de la investigación.* México: McGraw-Hill.

LEITHOLD, L. (1998). *El Cálculo. Séptima Edición*. México: Oxford University Press.

ROJAS, P. Y CISTERNA, F. (2010). *El aprendizaje basado en problemas (ABP) como estrategia metodológica de enseñanza y aprendizaje de la integral indefinida en paralelo con derivadas y su incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de ingeniería en informática de inacap, chillán.*(Tesis de maestría, Universidad del del Bio-bío). Recuperado desde http://joplin.cienciasbasicas.cl/files/projas.pdf

SÁNCHEZ, G., GARCÍA, M. Y LLINARES, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11* (2), 267-296.

SERRANO, J. Y CALVO, M. (1991). *Introducción a la psicología genética y sus relaciones con las disciplinas afines del currículum universitario*. España: Compobell.

SPIVAK, M. (1988). *Cálculo infinitesimal. Segunda Edición.* México: Editorial Reverté.

STEWART, J. (2007). *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4ª edición. México: Thomson Learning.

WOOLFOLK, A. (1996). Psicología educativa, 6ª ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.