

## TRIGONOMETRIZANDO EN LAS CALLES DE LEBRIJA

**L Martín Serrano**, *Universidad de Sevilla*

**J Núñez Valdés**, *Universidad de Sevilla*

### RESUMEN.

En esta comunicación se muestra el diseño general, desarrollo y puesta en valor de una propuesta didáctica innovadora, realizada como experiencia pedagógica en el ámbito de las Matemáticas, en concreto sobre Trigonometría, en una clase de 4º de Secundaria de esta disciplina en el I.E.S. Virgen del Castillo de Lebrija (Sevilla).

En particular, se detalla explícitamente la salida de los alumnos a las calles de Lebrija con el fin de realizar una toma de datos reales sobre diferentes edificios emblemáticos de la localidad, que les sirviesen para poder aplicar después a la vida real los conocimientos sobre Trigonometría aprendidos en el aula.

**Nivel educativo:** Secundaria.

### 1. INTRODUCCIÓN.

Dos son los objetivos principales de esta comunicación. El primero, mostrar de forma general las principales características de una propuesta didáctica innovadora, relativa a la enseñanza de la Trigonometría en Secundaria. Esta propuesta fue llevada a cabo en el I.E.S. Virgen del Castillo de Lebrija (Sevilla) por la autora de la comunicación, bajo la supervisión de un profesor del centro y del otro autor.

Por otra parte, dado que por razones de extensión los autores no han podido describir en profundidad todos los aspectos más notables y relevantes de esa propuesta, el segundo objetivo es detallar explícitamente una de las actividades realizadas dentro de la misma, consistente en la salida de los alumnos a las calles de Lebrija (Figura 1) con el fin de realizar una toma de datos reales sobre diferentes edificios emblemáticos de la localidad, que les sirviesen para elaborar posteriormente en el aula, con la ayuda de los conocimientos sobre Trigonometría que en esos momentos se les impartían, un estudio métrico completo de los mismos, en particular, de todas las medidas que no habían podido ser obtenidas directamente por ellos debido a su inaccesibilidad. Para la toma de medidas en las calles, los alumnos portaban un teodolito construido previamente por ellos en el aula.



Figura 1. Fotografía del grupo durante la actividad.

Esta propuesta innovadora ha consistido, por tanto, en una serie de actividades programadas por competencias básicas de forma integrada, en las que se otorgaba una especial relevancia a la investigación, capacidad crítica, trabajo colaborativo, etc., además de a las habilidades, actitudes y valores, relacionados con aspectos tanto intra como interpersonales, y a las estrategias de aprendizaje. Todo ello con el fin de desarrollar las competencias básicas desde una visión relacional y acercar a los alumnos a la resolución de problemas y tareas en el mundo real.

## 2. LA PROPUESTA DIDÁCTICA.

Se comentan en esta sección, de forma general, las actividades realizadas en el desarrollo de la propuesta, indicando sus características más importantes

### 2.1. DATOS TÉCNICOS DE LA EXPERIENCIA.

- Lugar: I.E.S. Virgen del Castillo de Lebrija (Sevilla).
- Curso y grupo: 4º de E.S.O., grupo B.
- Período de realización: durante el mes de abril de 2013.
- Profesor: la autora de esta comunicación.
- Número de alumnos: 24, de ellos 18 varones (75%) y 6 mujeres (25%).
- Textos utilizados: Libro 1, Libro 2 y otros documentos (ver Referencias).
- Materiales utilizados en las actividades: Cuestionario inicial de 9 preguntas. Fichas de tareas. Material de dibujo y medida: escuadra, cartabón, regla y

transportador de ángulos. Calculadora. Enunciado del trabajo grupal. Material para construir un teodolito (transportador de ángulos, tubo hueco, cuerda, plomada, pegamento y cinta métrica). Carrito de ordenadores.

## 2.2. LUGAR DE LA EXPERIENCIA.

El I.E.S. donde se llevó a cabo la propuesta fue el I.E.S. Virgen del Castillo, de Lebrija. Dicha propuesta fue desarrollada por la autora de esta comunicación, lo cual supuso su vuelta al centro en el que cursó la Secundaria y el Bachillerato, pudiendo así vivir en primera persona los cambios producidos durante los últimos quince años, tanto en lo referente al entorno familiar como al entorno social.

## 2.3. CONTEXTUALIZACIÓN DEL AULA.

El grupo de 4º de E.S.O. B estaba formado por 24 alumnos, que presentaban una gran diversidad. Una alumna era absentista, un alumno era repetidor y dos alumnos eran de altas capacidades intelectuales. No hubo alumnos con necesidades educativas especiales, pero sí había en el grupo un alumno daltónico, aunque sin ningún tipo de problema para seguir la clase, muy participativo y trabajador.

## 2.4. RESUMEN DE ACTIVIDADES.

Las actividades que se realizaron se resumen en la siguiente Tabla 1.

ACTIVIDAD	CONTENIDOS	COMPETENCIAS
1ª (01/04/13)	- ¿Qué es la Trigonometría? -Vídeo de Eratóstenes. Actividades relacionadas. - Repaso de ideas previas (Pitágoras y Thales).	Lingüística, matemática, cultural y artística, autonomía e iniciativa personal, aprender a aprender.
2ª (02/04/13)	- Tarea previa sobre razones trigonométricas de un ángulo agudo (aprendizaje constructivo). - Razones trigonométricas de un ángulo agudo.	Lingüística, matemática, autonomía e iniciativa personal, aprender a aprender.
3ª (08/04/13)	- Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º. Tarea (taller). - Regla nemotécnica de las razones de 30º, 45º y 60º.	Matemática, autonomía e iniciativa personal, aprender a aprender.
4ª (10/04/13 y 12/04/13)	- Salida de clase. Trabajo grupal.	Todas
5ª (16/04/13)	- Circunferencia goniométrica. Reducción al primer cuadrante. Tarea con GeoGebra. - Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.	Matemática y digital.

## 2.5 BREVE DESCRIPCIÓN DE LAS TRES PRIMERAS ACTIVIDADES Y DE LA QUINTA.

En la 1ª actividad nos ayudamos de recursos visuales para realizar la introducción a la unidad. Así, se les entregó a los alumnos un cuestionario sobre un par de vídeos (cortos) que se visionaron a continuación. El primero se titulaba "*Eratóstenes. Dame una vara y mediré la Tierra*" (vídeo1) y el segundo "*El legado de Pitágoras: Eratóstenes*" (vídeo2). En esta actividad se desarrollaron las competencias en comunicación lingüística, matemática, cultural y artística, autonomía e iniciativa personal y aprender a aprender. Estas competencias fueron también las que se trabajaron en el resto de actividades que se comentan en este subapartado, si bien en distintos grados en unas y en otras.

En la 2ª actividad, para la cual los alumnos debieron acudir a clase con transportador de ángulos, escuadra, cartabón, regla y calculadora, se trabajaron los conceptos básicos de razones trigonométricas en triángulos rectángulos. El objetivo era que los alumnos se familiarizaran tanto con los sistemas verbal y numérico, como con el gráfico.

En la 3ª actividad se pretendía que los alumnos aprendieran razonadamente las razones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , para que ellos mismos, posteriormente, se introdujeran, mediante un aprendizaje constructivo, en la circunferencia goniométrica (véase web1) en próximas sesiones.

En la 5ª actividad, realizada lógicamente después de la 4ª, los alumnos aprendieron a reducir ángulos al primer cuadrante. El objetivo era que se familiarizaran con las razones trigonométricas de cualquier ángulo, utilizando la circunferencia goniométrica para predecir el signo que tomarían los valores de seno, coseno y tangente, dependiendo del ángulo dado. Al tratarse ésta de una de las partes más complicadas de la unidad, nos apoyamos en un par de applets de GeoGebra (applets 1 y 2) para que los alumnos pudieran manipular la circunferencia goniométrica y descubrir por sí mismos qué es lo que ocurre. Con ello se trabajaron fundamentalmente las competencias matemática y digital.

## 2.6 DESCRIPCIÓN DETALLADA DE LA CUARTA ACTIVIDAD.

Los contenidos a trabajar en esta actividad fueron aquellos relacionados con las aplicaciones de la trigonometría y el cálculo de distancias. Sus principales objetivos eran calcular distancias a puntos inaccesibles y aplicar la trigonometría a la vida real, mediante el acercamiento de los alumnos a una de las ramas más relacionadas, como es la topografía. Para ello, debían trabajar en grupo y desde distintos puntos de vista como el de un arquitecto o un ingeniero. Así, debían buscar y manejar información relacionada, saber resolver los problemas a través de lo estudiado en clase, y, finalmente, construir un teodolito casero que les sirviera como medio para obtener las medidas necesarias.

Una descripción detallada de la actividad es la siguiente:

### 2.6.1 Taller de Trigonometría.

En primer lugar, se les proporcionó a los alumnos el siguiente enunciado:

### TALLER DE TRIGONOMETRÍA

Construcción de un aparato medidor de ángulos o teodolito casero.

Seguro que alguna vez habéis visto a un topógrafo en la calle realizando mediciones con un teodolito, ¿qué tal si construimos uno?

Para ello, necesitaremos un tubo de cartón, un transportador de ángulos, un trozo de cordel, una plomada o algún objeto que haga las veces de plomada, pegamento, lápiz y papel.

¿Cómo se fabrica? Cogemos el transportador y pasaremos el hilo o cordel a través del agujero que tiene el transportador en el centro. Haremos un nudo para que no se salga, tras haber colgado la plomada en el extremo. Pegaremos el transportador al tubo y habremos finalizado el teodolito casero que nos ayudará a medir ángulos de elevación o depresión.

Cuando miremos por el agujero del tubo en dirección al objetivo, veremos el ángulo que marca la plomada en el transportador, y así tendremos el complementario del ángulo buscado (Figura 2).

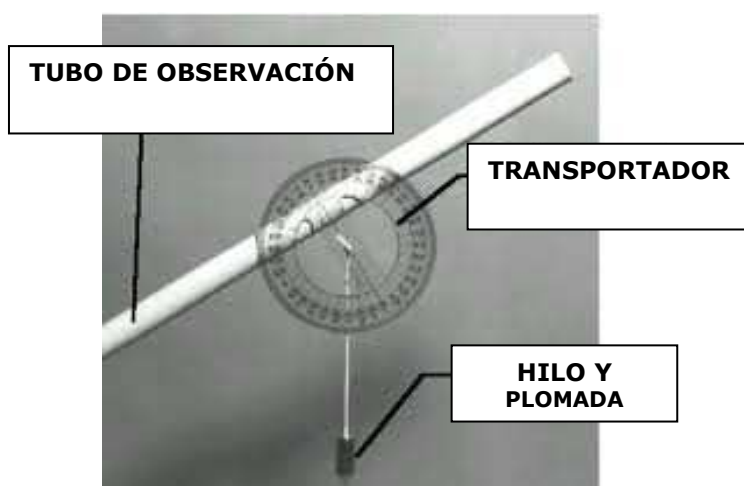


Figura 2. Construcción de un teodolito casero (véase web2).

Organización del trabajo grupal. Dedicaremos una clase a utilizar este teodolito para realizar medidas inaccesibles, por ejemplo, en el patio del centro o en distintos edificios de Lebrija. Para ello saldremos al exterior.

Cada grupo deberá repartirse las siguientes funciones:

- Portavoz: será la persona encargada de representar al grupo.
- Editor: será la persona responsable de que el trabajo con la wiki de la que se dispondrá, en la que volcar información, compartirla y discutirla, y la presentación se lleve a cabo de manera adecuada.
- Arquitecto: será la persona encargada de dirigir la recogida de datos y mediciones (trabajo de campo).
- Ingeniero: será la persona responsable de la correcta construcción del teodolito casero.

Todos los componentes del grupo trabajarán por igual, por lo que la asignación de funciones se realiza sólo para una mejor coordinación.

¿Qué vamos a hacer?

1.- En primer lugar, deberéis buscar información sobre la topografía y los mapas topográficos. ¿Para qué sirven estos mapas?

2.- Un elemento esencial en topografía es el teodolito. Busca información sobre su origen, sus usos, etc.

3.- Para poder poner en práctica lo hasta ahora conocido, construiremos un teodolito casero.

4.- ¡Vamos a practicar! Esta sesión de clase se realizará al aire libre, en el patio del instituto, el centro histórico de Lebrija, etc. Procuraremos que se trate de un espacio abierto en el que haya muchas distancias para medir.

Cuando nos encontremos en el lugar de realización de las prácticas, se elegirán unos 10 objetivos con puntos inaccesibles. Cada uno de los grupos deberá seleccionar al menos 4, y con la ayuda de una cinta métrica y el teodolito casero, se rellenará el siguiente cuaderno de campo (Tabla 2):

Edificio	Distancia	Ángulo de elevación	Distancia	Ángulo de elevación	Distancia	Ángulo de elevación

Tabla 2. Cuaderno de campo entregado a los alumnos.

Nota: Por ejemplo, si mi grupo eligiese la estatua de Elio Antonio, tendríamos que hacer 6 mediciones. ¿Cómo? Muy sencillo, con la cinta métrica nos situamos, por ejemplo, a 3, a 5 y a 6 m de la base de la estatua y medimos con el teodolito el ángulo que forma la parte más alta de la estatua con la horizontal, es decir, situados a 3 m de la estatua, miramos por el tubo hasta ver la parte más alta de Elio Antonio y anotamos el ángulo que marca el artillugio; y así desde los 5 m y los 6 m.

El trabajo lo deberán continuar los grupos en horario no lectivo. Se entregará un diario de campo adjuntando fotografías del grupo en cada uno de los emplazamientos escogidos, realizando las distintas mediciones y contando cada una de las dificultades, anécdotas y todo aquello que haya podido ocurrir durante el desarrollo del mismo. Los resultados se adjuntarán en un dossier final con todas las medidas bien organizadas, y la triple resolución del cálculo de las distancias a cada uno de los objetivos, con un esquema gráfico aclaratorio.

5.- Una semana después de la salida, cada grupo expondrá durante unos 8 minutos la resolución de uno de los problemas al resto de la clase. El portavoz del grupo será el encargado de defender el trabajo.

Se evaluará la actitud positiva hacia el trabajo en equipo, el cuaderno de campo, el dossier final y la presentación.

### 2.6.2 Desarrollo de la Actividad.

Con el objetivo de trabajar distintas competencias, además de la matemática, los alumnos tuvieron que realizar un trabajo grupal en el que pudieran desarrollar y aplicar las nuevas ideas y conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad. Para ello, los alumnos debían construir un teodolito casero, siguiendo las instrucciones del enunciado facilitado, para después realizar medidas indirectas con la ayuda de una cinta métrica. Los grupos eran de cuatro alumnos.

El enunciado se colocó en una wiki (de carácter privado para uso educativo en este grupo concreto), creada por la autora al efecto en la plataforma wikispaces (véase wiki1), y los distintos grupos tuvieron que entrar en ella para conseguir la información.

Al tratarse de un trabajo en el que todos debían cooperar, cada alumno tomó un rol y se hizo responsable de cierta parte de la tarea. Con ello se fomentaba que todos trabajasen, haciéndose responsables de cada una de las partes.

Se pretendía que los alumnos relacionasen la trigonometría con otras ciencias, por lo que el trabajo comenzó con una investigación sobre la topografía y los teodolitos. Además, debían decidir qué fachadas medir y comenzar a realizar el esquema a seguir para la salida de toma de datos. Con ello se trabajaban todas las competencias básicas.

Se usó también un carro de ordenadores, para que los alumnos buscasen información en internet por grupos y usasen la wiki antes mencionada, en la que además de buscar información sobre trigonometría y sus aplicaciones, y disponer de enlaces a vídeos de interés, tuviesen también un espacio destinado a que cada grupo subiese su trabajo, quedando así compartida la información.



Figura 3. Pantalla de inicio de la Wiki [tallerdetrigonometriavdc](https://tallerdetrigonometriavdc.wikispaces.com).

Mientras los alumnos trabajaban, la profesora realizó las oportunas observaciones y toma de notas para la posterior evaluación de su trabajo. Esta evaluación se realizó mediante una rúbrica del trabajo grupal, que tenía un valor del 25 % de la nota final (Tabla 3).

**RÚBRICA PARA LA EVALUACIÓN DEL TRABAJO GRUPAL.**

Fecha: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ GRUPO Nº: \_\_\_\_\_

ALUMNO/A: \_\_\_\_\_ VALORACIÓN FINAL: \_\_\_ / 24

	1	2	3	4	Valoración
<b>Recoger información</b>	No recoge ninguna información relacionada con el trabajo.	Recoge mínima información relacionada con el trabajo.	Recoge bastante información relacionada con el grupo.	Recoge toda la información relacionada con el grupo.	
<b>Compartir informaciones</b>	No transmite ninguna información al grupo.	Transmite poca información al grupo.	Transmite mucha información.	Transmite toda la información.	
<b>Responsabilidad</b>	No hace nunca su trabajo.	Muy pocas veces hace su trabajo. Siempre se le ha de recordar.	Normalmente hace su trabajo. Pocas veces se le ha de recordar.	Siempre hace el trabajo. Nunca se le ha de recordar.	
<b>Escuchar</b>	Siempre habla. Nunca escucha.	Generalmente habla. No escucha demasiado.	Escucha pero a menudo habla demasiado.	Escucha y habla de forma adecuada.	
<b>Cooperar</b>	Generalmente discute con los componentes del grupo.	Discute a veces.	Raramente discute.	Nunca discute con el grupo.	
<b>Tomar decisiones</b>	Siempre quiere tener razón.	Muchas veces decide ir con los amigos y no escuchar todas las posibilidades.	Considera normalmente todas las posibilidades.	Ayuda siempre al grupo a tomar la decisión.	

Tabla 3. Rúbrica para la evaluación del trabajo grupal

VALORACIÓN DEL GRUPO: \_\_\_ / 96 →

**EVALUACIÓN DEL CONTENIDO DEL TRABAJO GRUPAL.**

Fecha: \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_ GRUPO Nº: \_\_\_\_\_

Contenido del trabajo: \_\_\_ / 10

Precisión del trabajo: \_\_\_ / 10

Presentación del trabajo: \_\_\_ / 10

¿Se ajusta a lo pedido?: \_\_\_ / 10

VALORACIÓN DEL TRABAJO: \_\_\_ / 40 →

NOTA FINAL DEL TRABAJO GRUPAL.

\_\_\_ /



La nota final del trabajo será la media aritmética obtenida a partir de la valoración del grupo y la valoración del trabajo. Dicha nota representará el 25% de la nota final de la unidad didáctica.

Además de usarse una clase para realizar un esquema en la pizarra que aclarara los cálculos que, tras la toma de medidas, los alumnos tendrían que llevar a cabo para completar los esquemas que planteasen, los alumnos también salieron a la calle para la correspondiente toma de datos en la calle.

Para ello, se salió de clase puntualmente y con un recorrido fijado para no perder el tiempo. Dicho recorrido nos llevaba del instituto a la Plaza de España, ya que se trata de un espacio abierto y sin tráfico rodado, por lo que resultó ideal para llevar a cabo esta actividad con los alumnos. Pudieron medir y moverse con libertad, a la vez que era fácil no perderlos de vista.

Se procuró que llevasen todo bastante claro para que no se perdiera el tiempo y pudieran tomar la totalidad de las medidas durante la hora de salida (a los que no les dio tiempo, tuvieron que terminar la recogida de datos en horario no lectivo). Para esta actividad los alumnos no podían olvidar llevar su teodolito casero, cinta métrica, cámara de fotos, cuaderno y útiles de escritura (Figura 4).



Figura 4. Usando el teodolito en la calle.

Hay que señalar que con dicho trabajo no se pretendía sólo que recogieran y trataran la información, sino que se quería potenciar la capacidad crítica de los alumnos, ya que debían interpretar los resultados y sacar conclusiones de manera conjunta.

El desarrollo de esta tarea, consiguió que los alumnos ejercitasen la mayor parte de los conceptos estudiados a lo largo de las distintas sesiones y les hizo tomar conciencia de la utilidad práctica que tiene la trigonometría.

### 3. ALGUNAS CONCLUSIONES.

De manera esquemática y de una forma muy breve, por razones de extensión, los autores deseamos indicar que, en nuestra opinión, la propuesta desarrollada resultó ser muy positiva, debido a las siguientes razones:

- Se trabajó siempre desde un enfoque constructivista.
- Se procuró diseñar el aprendizaje como una tarea de cooperación social.
- La propuesta del trabajo grupal que los alumnos debían exponer en clase fomentó las relaciones interpersonales entre el alumnado, el respeto a las diversas opiniones y la cooperación con el resto de compañeros.
- Se combinaron sesiones de exposición con otras de tipo taller, lo cual resultó ser todo un acierto de cara a la motivación e interés de los alumnos. También se tuvieron siempre en cuenta las necesidades individuales de cada uno de los alumnos.
- La realización de una wiki personal por parte de la profesora conllevó algo de tiempo, pero permitió grandes resultados, además de conseguir incluso acelerar el proceso de control y evaluación del alumnado.

## REFERENCIAS.

### - Applets de GeoGebratube

Applet1 : [www.geogebra.org/m6517?mobile=true](http://www.geogebra.org/m6517?mobile=true)

Applet2 : [www.geogebra.org/m39403?mobile=true](http://www.geogebra.org/m39403?mobile=true)

### - Documentos internos del I.E.S.

Programaciones, criterios de evaluación y U.D. Integradas del Departamento de Matemáticas del I.E.S. Virgen del Castillo de Lebrija.

### - Libros de Texto

Libro1: *MATEMÁTICAS 4º ESO. Opción B. Proyecto La Casa del Saber*. Edit. Santillana.

Libro2: *MATEMÁTICAS B, PITÁGORAS. 4.º ESO. P. Conecta 2.0*. Editorial SM.

### - Otros documentos

FERNANDEZ MEDINA, FCO. JAVIER. *Unidad Didáctica: Trigonometría*. Universidad de Granada. Curso 2010-2011.

### - Vídeos

Vídeo1: <https://videopress.com/v/M3XqX84I>

Vídeo2: <https://videopress.com/v/HZ7HiQZI>

### - Webs

Web1: [goniometrica.blogspot.com.es](http://goniometrica.blogspot.com.es)

Web2: [www.cienciafacil.com/TeodolitoSimple.html](http://www.cienciafacil.com/TeodolitoSimple.html)

Web3: <http://tallerdetrigonometriavdc.wikispaces.com/>

### - Wikis

Wiki1: Wiki educativa privada ubicada dentro de [www.wikispaces.com](http://www.wikispaces.com), para uso de sus miembros, al objeto de volcar información en ella, compartirla y discutirla. En este caso, cada grupo tenía una clave de acceso con la que entraban. Su finalidad era la de trabajar colaborativa y activamente en clase.