APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL CENTRADO EN EL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Orlando García Hurtado, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”
Facultad de Ingeniería *Bogotá Colombia*

Mauro García Pupo, Universidad Antonio Nariño. Bogotá Colombia

RESUMEN.

Este artículo trata de una investigación en la que se propone una estrategia metodológica para la enseñanza del álgebra lineal en carreras de ingeniería basado fundamentalmente del análisis en los trabajos de Pölya (1954) y de Lakatos (1978), a través del diseño y adaptación de problemas donde se pone en funcionamiento el razonamiento plausible, con ayuda de la tecnología y la visualización geométrica como herramientas fundamentales.

La motivación de esta investigación surge de los problemas que presentan los estudiantes para el aprendizaje del álgebra lineal en carreras de ingeniería, donde son puestos de manifiesto en los resultados académicos de esta asignatura.

Nivel educativo: Universitario

1. INTRODUCCIÓN.

Uno de los principales problemas en la enseñanza de espacios vectoriales está en el "formalismo", conclusión a la que han llegado muchas de las investigaciones que se han llevado a cabo sobre la enseñanza del álgebra lineal. Algunas han tratado de abordar el problema desde el punto de vista didáctico intuicionista, otros desde el punto de vista geométrico, algunos dicen que el problema es semiótico, ya que a los estudiantes se les presentan las definiciones formalmente, sin haber aclarado algunos aspectos semánticos de ellas, otros dicen que la cuestión es que los estudiantes poseen mínimas bases de lógica formal y esto hace que los conceptos sean más complicados para ellos. Pero uno de los principales autores que más ha escrito e investigado sobre el tema, Jean-Luke Dorier, sostiene que no hay una fórmula única válida para resolver el problema, ya que los procesos cognitivos de las matemáticas son demasiado complejos, por lo tanto, estas dificultades deben ayudar al profesor a hacer su enseñanza más rica y más experta y con mucha flexibilidad, que es lo que se pretende con este trabajo. (Dorier 1999)

Es por ello que se investigó los problemas de la enseñanza y aprendizaje del algebra lineal en carreras de ingeniería y con base en estos se presentó un aporte metodológico viable que describe un modelo didáctico que se fundamenta en materiales docentes apoyados en el razonamiento plausible, el uso de la tecnología, la visualización geométrica y la resolución de problemas en carreras de ingeniería.

2. METODOLOGIA APLICADA

Este trabajo se desarrolló bajo las bases teóricas de la investigaciónacción, cuyo propósito fundamental se centra en aportar información que guíe la toma de decisiones para programas, procesos y reformas estructurales. Sampieri (2010) describe lo que es la investigación-acción para varios autores. Sandin afirma que "la investigación-acción pretende, esencialmente propiciar el cambio social, transformar la realidad y que las personas tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación". Elliot "conceptúa la investigación-acción como el estudio de una situación social con miras a mejorar la calidad de la acción dentro de ella". Kurt Lewis propone que "a través de dicha investigación se podía lograr avances teóricos y sociales". Por su parte, Sthenhouse adapta lo que se conoce hoy como investigación - acción a la educación. De esta manera el método para estudiar y explorar este problema, el cual se origina en la enseña y aprendizaje, y más en el segundo, tiene como fin mejorarla; ésta es la hipótesis de mayor importancia que tiene esta investigación. El fin principal de la investigación es enriquecer la práctica.

La principal característica de la investigación – acción es su desarrollo como un modelo en espiral que incluye diagnóstico, planificación, acción, observación y reflexión.

Algunas características de ésta investigación son: reflexiona sobre la práctica educativa para mejorarla, transformarla y comprenderla, realiza análisis críticos de las situaciones, contribuye a relacionar la teoría con la práctica y se lleva a cabo la investigación en un contexto determinado.

Población para el estudio

La población general son todos los estudiantes de ingeniería y la muestra se toma de los estudiantes que estudian ingeniería en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El esquema general del desarrollo de la investigación se lleva a cabo en tres etapas:

2.1. Etapa I. Diseño del estudio.

En la cual se llevó a cabo:

a. Descripción de diferentes investigaciones relacionadas con los objetivos y el planteamiento del problema del presente estudio.

b. Recolección y análisis de syllabus del programa de álgebra lineal de universidades nacionales y extranjeras

c. Fundamentación teórica del razonamiento plausible y otros a que haya lugar.

d. Diseño de pruebas diagnósticas

e. Encuestas a profesores y estudiantes

f. Diseño de actividades

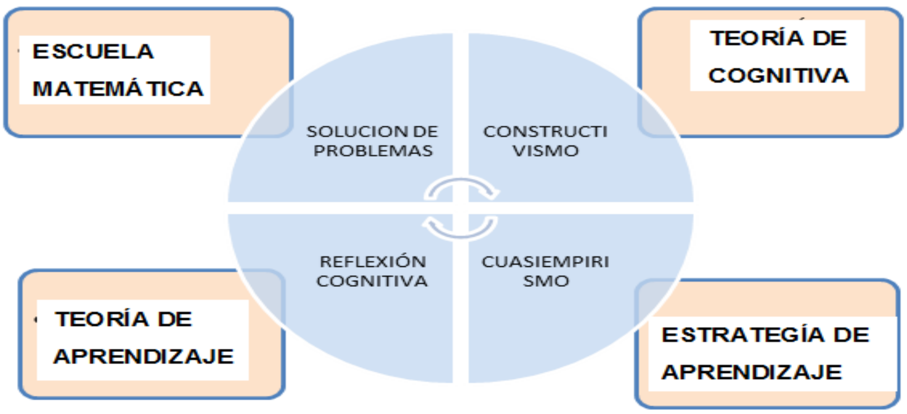
g. Diseño del modelo didáctico y prueba final

h. Diseño de encuesta actitudinal para los estudiantes.

i. Análisis de resultados

El modelo didáctico que se diseña en este trabajo está basado en la escuela cuasi-empírica de las matemáticas liderada por Lakatos y Polya, con fundamentos cognitivos y de aprendizaje basados en el constructivismo y la reflexión cognitiva, pero además se tiene previsto adicionarle un enfoque de visualización geométrica y el uso de la tecnología como herramienta didáctica. Una aproximación se muestra en la siguiente figura:

Figura1



Fuente: Autores

Con un proceso metodológico dado por

Figura 2

Fuente: Autores

Este proceso se basa en:

2.1.1. Aprendizaje Por Preguntas

Este enfoque está orientado a que los estudiantes piensen de manera sistemática para llegar a soluciones razonables de un problema, está centrado en el estudiante y se basa en problemas, por lo tanto, cada tema debe estar orientado hacía el concepto que el profesor quiere que el estudiante aprenda. Así se deben elaborar cuidadosamente preguntas para que el estudiante elabore ideas en su interior evitando preguntas triviales.
Aspectos que influyen para que se use este enfoque es una mejor actitud y aprovechamiento de los estudiantes ya que facilita la comprensión y el descubrimiento matemático, además como este enfoque está centrado en el estudiante, permite una participación más activa de estos, en la adquisición de conceptos, también ayuda a desarrollar el pensamiento crítico, facilita la capacidad para resolver problemas y por lo tanto otorga mayor habilidad en el desarrollo de procesos matemáticos

2.1.2. Niveles de preguntas

2.1.2.1. Primer nivel: Son preguntas básicas donde se pretende buscar información e introducir al estudiante en el tema.

Ejemplos:

2.3.1.1. ¿Podrá cualquier vector en $\mathbf{R}^2$, expresarse como una combinación lineal de los vectores (1, 3) y (5,2)? y ¿Si los vectores son (1,2) y (2,4)?

2.3.1.2. ¿Podrá cualquier polinomio de grado dos escribirse como una combinación lineal de los polinomios $\{\mathbf{1}, x, \boldsymbol{x^2}\}$?

2.3.1.3. En espacios vectoriales: ¿Todo espacio vectorial, diferente del trivial tiene infinitos elementos? Si es así de un ejemplo.

2.3.1.4. ¿Todos los conjuntos infinitos son espacios vectoriales?

2.3.1.5. En subespacios vectoriales: ¿Todo subconjunto de un espacio vectorial debe tener el vector cero?

2.1.2.2. Segundo nivel: son aquellas que implican que el estudiante analice, es decir que lo llevan a conjeturas, que van a probarse o refutarse

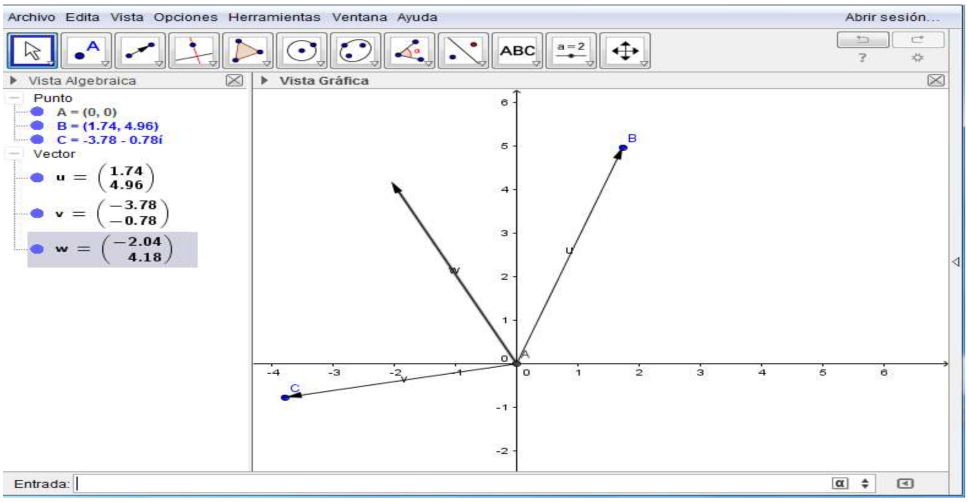
Ejemplos

2.3.2.1. En subespacios vectoriales: ¿Todo subconjunto de un espacio vectorial es también un espacio vectorial?

Actividad

Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{V = R^2}$ y sea $H = \{(x, y)\epsilon R^2 | x * y \geq 0\}$, ¿Será H un subespacio vectorial?

Figura3



Fuente: autores

1. ¿Qué condiciones serán suficientes para que un subconjunto H de un espacio vectorial V, sea también un espacio vectorial?
2. ¿Será la unión de dos subespacios vectoriales un subespacio vectorial?
3. ¿Será la intersección de dos subespacios vectoriales un subespacio vectorial?

Preguntas tomadas de (Sierpinska 2010)

2.1.2.3. Tercer nivel: aquellas preguntas donde el estudiante debe aplicar el concepto aprendido en práctica, es decir en la resolución de problemas.

Ejemplo

Si una masa ***m*** se coloca en el extremo de un resorte y se tira hacia debajo de esta y luego se libera, el sistema masa-resorte comenzará a oscilar. El desplazamiento ***y*** de la masa de su posición de reposo está dada por una función de la forma: $y = c_1 cos\omega t + c_2 sen\omega t$ donde ω es una constante que depende del resorte y de la masa. ¿Será este conjunto de todas las funciones descritas por la ecuación anterior un espacio vectorial? (Con ωfija y c_1y c_2 arbitrarias). (Lay 2012)

2.2. Etapa II. Aplicación y experimentación. En esta etapa fundamental para la investigación se aplican las actividades propuestas y tiene como objetivo observar y registrar el desarrollo de éstas por parte del estudiante en el aula de clase.

2.3 Etapa III. Análisis de los procesos de aprendizaje. Concierne al análisis de los resultados obtenidos después de realizar todo el proceso de aplicación y experimentación.

3. RESULTADOS

A continuación, se muestran algunos resultados de problemas resueltos por los estudiantes donde se pone de manifiesto el razonamiento plausible:

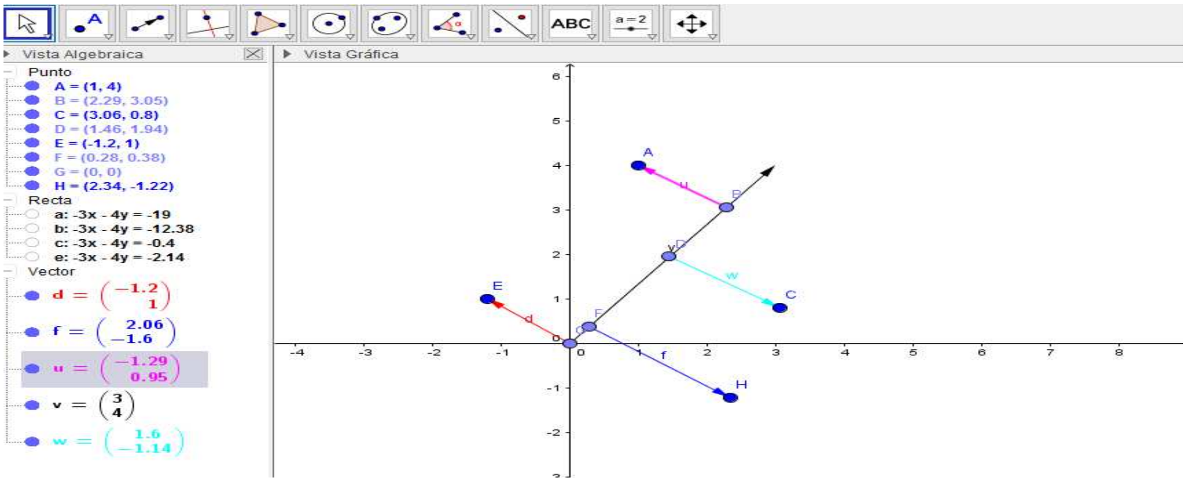
3.1. Sea $u = 3i + 4j$, un vector en R^2. Strang (2007)

a. Encuentre un vector ortogonal a u
b. ¿Hay uno solo o hay varios?
c. Muestre que estos vectores forman un subespacio en R^2
d. Halle una base para ese subespacio
e. ¿Cuál es la dimensión de esa base?

Solución dada por un estudiante:

a. El estudiante traza por el Geogebra varios vectores ortogonales:

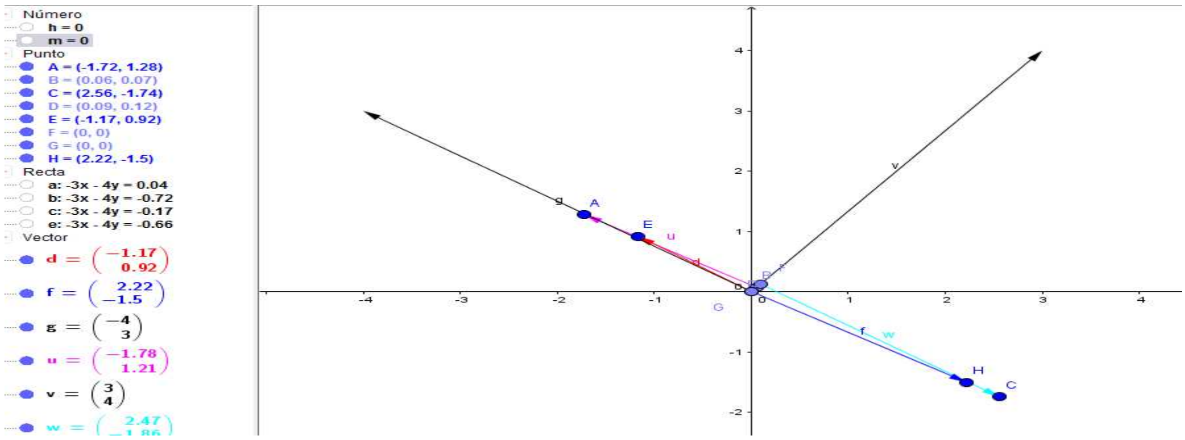
Figura 4



Fuente: Autores

f. Traslada todos los vectores al origen:

Figura 5



Fuente: Autores

b. El estudiante se da cuenta que estos vectores forman una recta que pasa por el origen, por lo tanto, es un subespacio vectorial.

c. Toma uno de estos vectores como base: (-4,3) y lo comprueba realizando el producto punto por el vector u.

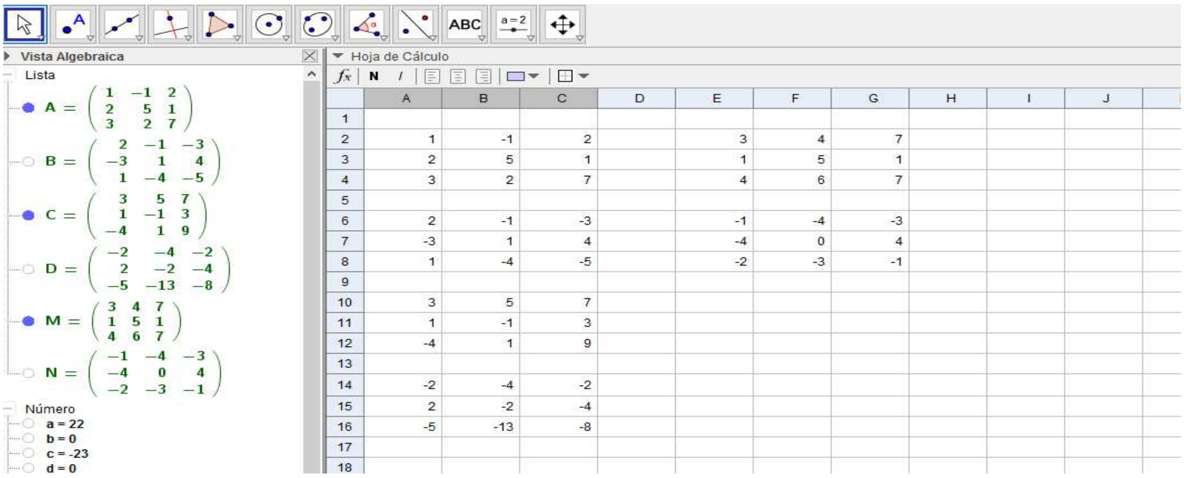
d. Concluye que como el subespacio en una recta solamente tiene un vector en la base y por lo tanto su dimensión es uno.

3.2 Demuestre o refute: Si v_1, v_2, v_3, son vectores linealmente independientes, las diferencias $u_1 = v_1 - v_2$, $u_2 = v_1 - v_3$ y $u_3 = v_2 - v_3$ son linealmente dependientes. (Dubinsky 2002)

Solución.

Para este ejercicio un estudiante comenzó realizando tanteo con tres vectores en R^3 linealmente independientes, para ello utilizó la hoja de cálculo del geogebra, donde le facilitaría los cálculos, veamos:

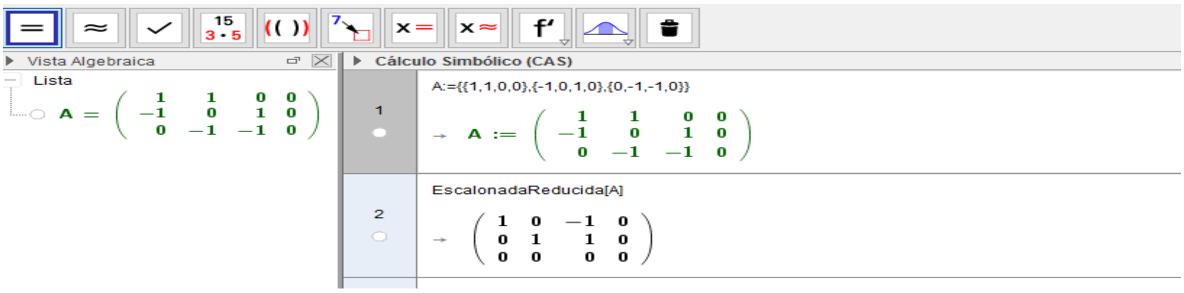
Figura 6



Fuente: Autores

Se observa que el estudiante tomó tres vectores, comprobó que fueran linealmente independientes hallando el determinante de la matriz conformada por las columnas de estos, luego realizó las diferencias que se pedían y comprobó que eran linealmente dependientes, también calculando el determinante, allí conjetura que los vectores son linealmente dependientes, luego realiza la prueba, utilizando también el Geogebra:

Figura 7



Fuente: Autores

A continuación, se muestra una tabla estadística que representa en cada celda el porcentaje de problemas que resolvió correctamente cada estudiante por guía, utilizando visualización geométrica, tecnología y razonamiento plausible. Por ejemplo, la celda correspondiente a estudiante 1, guía 1, establece que el estudiante resolvió correctamente el 77.78% de los problemas de la guía 1

Tabla 1

Estudiante	Guía1	Guía1	Guía1	Guía1	Guía1	Guía1	Guía1
1	77,78	83,33	75,00	84,62	77,78	81,82	80,00
2	66,67	75,00	66,67	76,92	77,78	81,82	80,00
3	88,89	66,67	58,33	53,85	66,67	90,91	90,00
4	55,56	58,33	66,67	61,54	66,67	72,73	70,00
5	66,67	75,00	75,00	69,23	77,78	72,73	60,00
6	100,00	91,67	83,33	84,62	88,89	100,00	90,00
7	55,56	58,33	50,00	69,23	66,67	54,55	60,00
8	88,89	83,33	75,00	76,92	77,78	81,82	70,00
9	77,78	83,33	75,00	76,92	66,67	72,73	80,00
10	66,67	66,67	66,67	69,23	77,78	72,73	70,00
11	66,67	58,33	58,33	76,92	55,56	63,64	60,00
12	88,89	75,00	66,67	76,92	77,78	81,82	80,00
13	77,78	66,67	75,00	76,92	77,78	81,82	70,00
14	88,89	83,33	66,67	69,23	66,67	72,73	70,00
15	88,89	75,00	83,33	84,62	77,78	81,82	80,00
16	66,67	66,67	75,00	76,92	77,78	81,82	80,00
17	77,78	66,67	83,33	76,92	88,89	81,82	70,00
18	77,78	83,33	83,33	84,62	66,67	81,82	80,00
19	66,67	75,00	58,33	76,92	66,67	72,73	70,00
20	55,56	66,67	58,33	69,23	66,67	72,73	60,00
21	77,78	83,33	66,67	84,62	77,78	81,82	80,00

Fuente: Autores

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Tanto de los resultados como de la observación de las clases se puede concluir que al implementar el modelo didáctico basado en el razonamiento plausible, visualización geométrica y uso de la tecnología:

1. Se ha potenciado un aprendizaje activo, ya que el estudiante es el protagonista de esta propuesta metodológica.
2. El uso de la tecnología ha motivado y facilitado el aprendizaje ya que los estudiantes lo utilizan como herramienta útil tanto en la visualización como en el cálculo de procedimientos rutinarios.
3. Los problemas no rutinarios y retadores motivan a los estudiantes a la búsqueda de soluciones utilizando diferentes estrategias que los conducen a aprender el concepto que se pretende para cada tema.

4. La actitud de los estudiantes en clase siempre es activa ya que la metodología basada en preguntas hace que ellos estén siempre en búsqueda de soluciones.
5. Socializar el modelo didáctico y el procedimiento de implementación práctico, para que sea de utilidad tanto a los estudiantes como a los docentes de las facultades de ingeniería.

REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFIA

DORIER, J (1999). Teaching and Learning lineal algebra in first year of French Science University, recuperado del URL: http:// Users/user/Downloads/unige_16857_attachment01.pdf.

DUBINSKY (2002). Learning Linear Algebra with isetl, recuperado del URL: http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

LAY, D (2012). Lineal Algebra and Its Applications. Ed Addison wesley

SAMPIERI, R. y otros (2010). Metodología de la investigación. Quinta edición. Ed. Mc Graw Hill.

SIERPINSKA, A. and DORIER, J. (2001). Research and learning of linear algebra p 259. From the book: *The teaching and learning of mathematics at university level.*

STRANG(2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones, ed Thomson