

LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA: ENTRE LA REPRESENTACIÓN DE UN NÚMERO Y SU PERTENENCIA A UN CONJUNTO

Autor 1: Vilotta, Diego Francisco, *Provincia de Corrientes – Argentina- Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)*

Autor 2: Gorostegui, Edith Noemí, *Provincia de Corrientes – Argentina- Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)*

Autor 3: Saiz, Irma Elena, *Provincia de Corrientes – Argentina- Universidad Nacional del Nordeste (UNNE)*

RESUMEN

En esta ponencia analizamos la influencia que, modificar la representación de un número, provoca en la decisión sobre a qué conjunto numérico pertenece e identificamos el bagaje matemático necesario para un futuro profesor de Matemática. Concluimos que además de las representaciones semióticas de los números influyen las diferentes formas de definir los conjuntos numéricos. En la formación de profesores se hace necesario un tratamiento específico de estos temas, a partir del trabajo no solo con los modelos abstractos (estructuras) sino con los sistemas (conjuntos de números) que son modelizados.

Nivel educativo: secundario y universitario.

1. INTRODUCCIÓN

En la enseñanza habitual se considera como necesario que todo saber enseñado aparezca como definitivo e incuestionable. Esta necesidad “didáctica” choca con la necesidad de la dinámica de todo proceso de estudio de retomar las organizaciones matemáticas estudiadas anteriormente para profundizar su potencialidad, al ponerlas en relación unas con otras.

En cuanto a nuestro tema de investigación, los conjuntos numéricos en tanto objeto de aprendizaje en el nivel secundario, se puede observar que - en general - se asigna una unidad o capítulo a cada uno de los conjuntos numéricos: N , Z , Q y R donde se definen, se representan, en particular en la recta numérica, ordenan sus elementos, presentan los algoritmos de las distintas operaciones, sus propiedades y se resuelven ecuaciones en dicho conjunto. Se trata en general de unidades aisladas, en las cuales no se incluye el análisis de las distintas representaciones ni propiedades de los números en función del conjunto de referencia en el cual se está trabajando.

Cuando se amplía un conjunto no se retoma el trabajo anterior, es decir, no se retoman las similitudes y diferencias con el conjunto numérico previamente trabajado.

Esto es compartido por M. Socas (2001) quien afirma: *La enseñanza – aprendizaje de los conjuntos numéricos en el sistema educativo está excesivamente individualizada en cada conjunto numérico, con conexiones poco significativas entre los diferentes números y entre estos y sus representaciones semióticas.*

Y en la formación superior, cuando se cuestiona sobre la pertenencia de un número a distintos conjuntos numéricos – consigna habitual en el inicio de la carrera docente – se tiene en cuenta la relación de inclusión de los mismos, pero los números elegidos aparecen en su representación canónica. Por otro lado, la enseñanza con los conjuntos numéricos parte de una presentación axiomática de los Números Reales (R) como un cuerpo ordenado, aceptándose desde un primer momento sus propiedades básicas correspondientes a definir un cuerpo ordenado y en relación con la completitud. Luego, tomándolo como referencia se definen, los números naturales, los enteros y los racionales como subconjuntos de R . La forma casi totalmente algebrizadano habilita necesariamente en los alumnos un tratamiento aritmético de los números.

Con esta presentación no es necesario adaptar la justificación de las distintas propiedades según el conjunto numérico en el que se esté trabajando, lo que sí es indispensable cuando los conjuntos se construyen desde N a R , como sucede en la enseñanza obligatoria.

En los estudios superiores no siempre se incluye esta construcción por medio de ampliaciones - desde N hasta R -no es generalmente objeto de estudio ni se problematiza, dejando a los profesores en formación sin conocimientos ni organización matemática que fundamente su tarea de enseñanza.

Tampoco forma parte en general, el tratamiento de las expresiones decimales de los números reales, analizando las especificidades de las de los elementos de cada conjunto numérico ni de las fracciones decimales que permiten definir los números decimales. Este tratamiento permitiría un rico trabajo aritmético tanto con las fracciones decimales, como con los números periódicos, con múltiplos y potencias, divisores y factores primos en el nivel secundario.

En el sentido de la necesaria construcción de los conjuntos numéricos se puede citar un ejemplo de trabajo¹ – propuesto para los primeros años del secundario – en el que se ponen en relación los conjuntos numéricos. Nos referimos al análisis de la división desde N a Q , en el que se analizan sus definiciones posibles, sus propiedades, el avance que significa definirla en un conjunto que amplía su dominio de definición, identificando su sentido esencial que unifica estas relaciones y permite asignarles el mismo nombre de división; el análisis de la misma desde una relación definida en N hasta convertirse en una operación en Q , etc.

¹Etchegaray S., Saiz I. (2016). Espacio curricular: Enseñanza de la Aritmética. Especialización Docente de Nivel Superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. <http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/wp-content/uploads/2016/04/Programa-Ense%C3%B1anza-de-la-Aritm%C3%A9tica-Secundario1.pdf> Recuperado de Internet el día 04/05/2016

La perspectiva epistemológica que plantea la Didáctica de la Matemática en la cual se inscribe nuestra investigación involucra volver la mirada sobre el conocimiento en juego, en nuestro caso los conjuntos numéricos² para cuestionarlo, interrogarlo y problematizarlo, básicamente para plantearse preguntas en cuanto a identificar la naturaleza de un número más allá de la representación particular seleccionada.

Tal como señala Duval R. (1993; p.38)³:

"(...) por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje"

La pregunta que se formula el autor por las posibilidades de aprendizaje de los alumnos es interesante para reflexionar respecto del papel de las representaciones semióticas para el aprendizaje de los conceptos matemáticos:

"(...) ¿cómo podrían ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados?"
(Duval: 1993; p. 38)

En el aprendizaje de los números, estos conceptos cobran su mayor importancia; no es posible para los alumnos adquirir conocimientos numéricos sino a través de sus representaciones semióticas, apareciendo necesariamente como "natural" que se inicie el trabajo con cada conjunto numérico a partir de una única representación. Así, los números racionales son los cocientes de enteros, los enteros son los naturales, los negativos y el cero, etc. Se inicia de esta manera, la conceptualización de los conocimientos numéricos en la cual, la representación canónica se convierte en parte constitutiva del concepto mismo.

Esta realidad inevitable, exige una reflexión posterior – tanto en el nivel secundario como en el superior – y problematización sobre los conjuntos numéricos, sus relaciones, las distintas representaciones, especialmente sus alcances o limitaciones cuando se cambia el conjunto de referencia.

En relación con la expresión canónica de los números, retomamos las consideraciones de G. Cirade (2006)⁴ quien afirma:

"La razón de ser primigenia de la simplificación de fracciones y de otros gestos de naturaleza similar (como racionalización de denominadores, orden de los polinomios,...) tiene que ver con el esfuerzo de aportar una

²Saiz, I; Gorostegui, E; Vilotta, D. (2011): Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza en Educación Matemática Vol. 23; Número 1. Abril 2011. México.

³Citado en Gorostegui, Edith (2012): Mémoire de Recherche: Las Prácticas de escritura en el trabajo algebraico de alumnos de secundaria. Université de Reims Champagne-Ardenne. IUFM Champagne-Ardenne. Francia.

⁴Citado por Saiz, Gorostegui, Vilotta (2011).Op. Cit.

respuesta uniforme a la pregunta: ¿Cómo reconocer si dos objetos matemáticos de un cierto tipo, designados de una cierta manera son o no el mismo objeto? Por ejemplo, ¿ $7 \times 5 - 8$ es igual a 3^3 ?

Y continúa afirmando:

"Para un tipo de objetos matemáticos – por ejemplo, para los números racionales – se dispone de una escritura que se la puede calificar de canónica, de modo tal que cada uno de los objetos considerados se escribe usándola de una única manera o, para decirlo de otra manera, recibe un único "nombre"; así $5/3$ es el nombre canónico de un número racional que puede ser designado por otras escrituras: $10/6$; $1 + 2/3$; etc.

(...) Encontrar la solución canónica consiste en:

- *Crear un sistema de escritura de objetos del tipo considerado en el que cada uno tenga una escritura y sólo una*
- *"Calcular" la escritura canónica de cada uno de los objetos por comparar*
- *Decidir entonces, sólo con una mirada sobre sus escrituras canónicas si los dos objetos son idénticos o no".*

La autora aclara que no siempre es indispensable llegar a la expresión canónica de los objetos matemáticos, especialmente cuando la tarea no es comparar dos expresiones numéricas, y que, con frecuencia es útil contar con otras expresiones equivalentes no canónicas, pero que muestran ciertas propiedades apropiadas al objetivo que se persigue.

En particular, el conjunto de números decimales D , entendido como conjunto de números que poseen una expresión decimal finita, no está identificado en general en la escolaridad obligatoria como sistema numérico propio e independiente sino como otra expresión de los números reales y aún sólo de los racionales en ciertos casos, dado que R es definido recién en el último tramo del nivel secundario. Es el conjunto numérico presente en la escuela primaria, aunque a partir de situaciones de medición y de designación de cantidades. Sólo en algunas propuestas tanto de primaria como de secundaria, se relacionan con las fracciones decimales que les otorgan a la vez un recurso de validación. La confusión entre número decimal y expresión decimal es frecuente.

En palabras de J. Centeno (1988)⁵:

*"La expresión **número decimal** es ambigua, porque la palabra número exige un adjetivo que se refiera a su naturaleza intrínseca. Por ejemplo, los adjetivos natural, racional, real nos permiten identificar la naturaleza de los números de los que hablamos, naturaleza que es independiente de la forma de representar estos números y, en particular, del sistema de numeración elegido. En cambio la palabra **decimal**, que procede de "diez" hace referencia a la base de numeración más extendida, llamada numeración decimal".*

⁵Citado en Saiz, Gorostegui, Vilotta (2011). Ob.cit.

En la formación superior aparecen representaciones decimales de los números, pero difícilmente se mencione el conjunto D , y menos aún la discusión sobre las diferencias entre números decimales y expresiones decimales de los números o , si como representación decimal abarca todo R o sólo Q y más aún, si los números enteros – y también los naturales – poseen o no una escritura decimal y si están incluidos o no en el conjunto D .

La poca visibilidad de los números decimales como conjunto numérico específico e independiente en la Matemática y en la enseñanza, provoca algunos fenómenos “curiosos” como el siguiente: las técnicas para operar con enteros y fracciones o decimales, recurren a una escritura que los homogeniza con la de las fracciones y los decimales: escribir 2 como $2/1$ o como $2,0$ o $2,00$. Ahora bien, ante la pregunta ¿puede considerarse a 2 como un número racional? alumnos de distintos niveles educativos responden positivamente recurriendo a la escritura fraccionaria anterior; sin embargo, ante una pregunta similar con respecto a si 2 puede ser considerado como un número decimal, la respuesta en muchos casos es No.

En esta ponencia, pondremos en discusión, en qué medida, las distintas representaciones de un número - canónicas o no - influyen en la decisión sobre a qué conjunto numérico pertenece, confrontando la expresión canónica que los define con su expresión decimal. Especialmente analizaremos la riqueza de una reflexión sobre esta cuestión en la formación matemática de futuros profesores, indispensable para justificar y controlar tanto las propuestas de enseñanza como la matemática que circule en las aulas de la escolaridad obligatoria.

2. DESARROLLO

2.1. DISPOSITIVO DIDÁCTICO

Con el objetivo anterior, diseñamos un dispositivo didáctico para analizar la influencia del tipo de representación de un número al determinar la pertenencia o no a un conjunto numérico. Este instrumento es usado en el desarrollo de la asignatura Didáctica de la Matemática de 4º año del Profesorado de Matemática⁶ de la FACENA-UNNE, Argentina, primero como tarea a resolver en forma individual; a continuación se organiza un intercambio y discusión en pequeños grupos, que concluye en un acuerdo sobre las respuestas y argumentos y, finalmente se comparte una presentación y discusión colectiva de los resultados, de las dudas, dificultades, etc. así como institucionalización de una organización de los sistemas numéricos para el ámbito escolar y para el análisis de libros de texto.

Si bien incluimos algunos porcentajes como indicadores de las tendencias, no nos interesa comunicar los resultados del estudio estadístico, sino mostrar cómo esta tarea permite a los alumnos una primera revisión y cuestionamiento de sus conocimientos sobre el tema de estudio que permita fundamentar una futura enseñanza en el nivel secundario o incluso en el universitario.

⁶Cohortes 2013-2015.

En esta tarea pretendemos enfrentar a los alumnos a cuestiones relacionadas con los conjuntos numéricos, sus propiedades, representaciones usuales, etc. y en particular enfrentarlos a la diferencia entre la representación canónica habitual en la cual están definidos los conjuntos y sus expresiones decimales.

El cuadro es el siguiente y es entregado con la consigna: *Indicar para cada uno de los siguientes números a cuáles conjuntos pertenece y a cuales no, justificando la respuesta.* También se solicita la definición de los conjuntos **D, Q** y **R-D**.

Conjuntos	D	Q	I	Q-D
Números				
—				
-				
—				
-				
—				
—				
—				
1,3555...				
-				
0,1211221112...				

La representación elegida para algunos números no es la canónica. Por ejemplo, $2,3/4,5$ constituye un número muy particular ya que no es un número decimal, porque se puede escribir como una fracción irreducible donde su denominador no sólo posee como factor a 2 o a 5, sino que incluye además el factor primo 3. Tampoco es la representación canónica de un número racional, ya que no aparece como cociente de enteros. Sin embargo cuestiona a la vez ambos conjuntos ya que se podría pensar que el cociente de decimales es un decimal y no es racional porque sus elementos no son enteros.

El número $\bar{\quad}$ es un número entero y por lo tanto decimal⁷ - si se considera a R como conjunto de referencia - pero su representación no es canónica y puede

⁷ Aunque como veremos, para casi la mitad de los alumnos, los números enteros no forman parte del conjunto D de números decimales.

cuestionar tanto la idea si es decimal porque es entero, como que sea racional debido a la presencia de un radical.

El número $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$ es un racional, con una expresión decimal periódica no nula. Pero no se trata de un cociente de enteros, por lo tanto puede aparecer la duda de si es racional. Por otra parte o a la vez, al estar escrito como cociente de irracionales, podría reforzar la idea de que sea un irracional.

A pesar de una expresión decimal similar, en el sentido de ser números con coma y poseer una expresión decimal infinita, el número 1,3555... es un racional mientras que 0,121122111222... es irracional. El hecho de tener una coma podría sugerir la idea de que ambos son decimales, y la falta de conocimientos sobre las expresiones decimales puede provocar la duda de si se trata de números racionales o no.

La diferencia entre las fracciones $6/15$ y $7/6$ está dada porque la primera es una fracción decimal – y por lo tanto es un número decimal – pero no la segunda, si bien ambos son racionales. Su escritura fraccionaria canónica favorece claramente reconocerlos como racionales, sin embargo plantean la dificultad de decidir si son decimales o no a partir de su escritura con coma.

2.1.1. Sobre el conjunto de números decimales D

En la tarea que estamos analizando, fue incluido el conjunto D, tanto en el cuadro, como en la solicitud de definirlo, debido justamente a las consideraciones anteriores. Tener que decidir para cada número si se trata o no de un número decimal, puede poner en duda no sólo las propias concepciones sobre su definición, sino también su relación con otros conjuntos.

A lo largo de los 3 (tres) años en los que realizamos esta tarea, hemos podido identificar distintas definiciones de números decimales, que aparecen sistemáticamente cada año:

D = R con alrededor de un 40%;

D = Q con 22% y

D = D tal como lo hemos definido más arriba: 28%.

Sin embargo, es importante señalar que en cada una de estas categorías se incluye una gran parte – alrededor de 40% del total de la muestra – que elimina Z del conjunto D. Es decir, un número decimal es aquél número que se puede escribir con coma y con un desarrollo decimal no nulo. La forma de obtener estos porcentajes es la siguiente: al definir el conjunto D los alumnos explican que está formado por los números reales (por ejemplo) pero de las respuestas dadas en el cuadro o de sus argumentos podemos concluir que no están incluyendo a Z en el conjunto D. Por estos motivos consideramos que el 40% considera D = R.

Dado que la categoría "Otros" constituye un porcentaje aproximado de 10%, estamos afirmando que sólo la mitad de los alumnos consideran a los números naturales o enteros como decimales.

Claramente el significado que se atribuya a D, hace variar la pertenencia o no de los números dados a los conjuntos numéricos. Como se puede ver tanto la concepción que se tenga de número decimal como la representación elegida estarían condicionando la pertenencia del número a los distintos conjuntos.

En cuanto al número 1,35555... es reconocido como decimal por 90% de los alumnos. En este caso, si se piensa que D=R, D = Q o D = R-Z afirmarían que

es decimal. Aquéllos que consideran a los números decimales como los que están efectivamente escritos con coma responderían erróneamente.

2.1.2. Sobre el conjunto de números racionales \mathbb{Q}

De acuerdo a la definición habitual del conjunto \mathbb{Q} , para aceptar un número como racional debería poder escribirse como cociente de enteros.

Entonces ¿cuáles de los números dados deberían ser reconocidos como \mathbb{Q} sin mayores dudas? $6/15$ y $7/6$ y efectivamente lo son por una enorme mayoría de alumnos.

En cuanto a los números escritos con coma: $1,3555\dots$ y $0,121122\dots$ ¿cómo averiguar si se pueden escribir como cociente de enteros? En el nivel secundario se incluye una técnica para escribir un número periódico en forma de fracción, pero en general se trata de una técnica más de las tantas que se incluyen en el capítulo de racionales, sin poder comprender realmente la importancia de la misma. En cuanto al número $0,121122\dots$, para averiguar si se puede o no escribir como un cociente de enteros es necesario contar con otros conocimientos. Es necesario analizar las características de este número y reparar que, a pesar de que sus sucesivas cifras decimales se obtienen incrementando regularmente cada una, no es posible hablar de una periodicidad y por lo tanto no se podrá escribir como un cociente de enteros, no será racional sino irracional.

Si además se sabe que los racionales se pueden escribir por medio de una expresión decimal finita o periódica se podría reconocer que $1,3555\dots$ también es racional.

Otras dudas aparecerían por ejemplo con el número $2,3/4,5$ dado que se trata de un cociente, asociado en principio al conjunto \mathbb{Q} ; si bien sus términos no son enteros, no representa una dificultad para los alumnos, encontrar una fracción equivalente formada con enteros.

El número $\frac{\sqrt{2}}{5}$ también es un cociente pero la presencia de un radical, aparece como más definitorio para identificarlo como racional.

Una dificultad mayor aparece con el número $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$ debido a que se trata de un cociente de números irracionales en relación con el cual no siempre se busca la expresión canónica $2/3$. Recurrir a una propiedad incorrecta de que un cociente de irracionales es irracional o la idea muy enfatizada que si en la representación de un número existe un radical entonces es irracional lleva a un 20% de los alumnos a afirmar que es irracional.

En cuanto al número irracional $0,121122111222\dots$ lleva a un 22% de los alumnos a afirmar que es racional, ya sea por poder escribirse con coma o por la idea de que los irracionales, al no ser periódicos, deben tener indefectiblemente una expresión decimal totalmente irregular y no es el caso en este número.

2.1.3. Sobre el conjunto de números Irracionales \mathbb{I}

Aunque parezca un poco sorprendente, la mayor cantidad de respuestas correctas en una columna corresponde al conjunto \mathbb{I} de números irracionales. Los

porcentajes sin embargo decrecen frente a los números $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$ y $0,121122111222\dots$ ya analizados previamente y en menor medida $(\sqrt{2})^2$ donde la presencia de un radical dificulta en parte su reconocimiento como entero.

2.1.4. Sobre las dudas

Dado que el cuadro es llenado por los alumnos en forma individual ya sea con birome o lápiz, al borrar, sobrescribir o utilizar corrector, queda un registro de las dudas, al menos aquéllas que los llevaron a escribir una cierta respuesta y luego corregirla (no las dudas o razonamientos mentales que no quedaron registradas)

A partir del análisis a priori – en el marco de la investigación sobre conjuntos numéricos – podíamos anticipar que los números $2,3/4,5$; $(\sqrt{2})^2$ y $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$ serían los “candidatos” a provocar las mayores dudas en los alumnos que completen el cuadro por los motivos que ya han sido analizados. Los porcentajes que incluimos corresponden a las dudas registradas en relación con uno o más conjuntos numéricos más allá de la respuesta que finalmente fue consignada en cada casilla:

Números	$\frac{2,3}{4,5}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$(\sqrt{2})^2$	$1 + \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$	6/15	1,3555 ...	7/6	0,121122 ...
Porcentaje de dudas	22,6	6	22,6	4,8	16,2	4,8	11,3	3,2	8

3. CONCLUSIONES

En este apartado incluimos las cuestiones centrales que es necesario incorporar en la formación de profesores de matemática:

- Ampliar el espectro de propiedades, escrituras, definiciones, etc. de los elementos de cada uno de los conjuntos numéricos.
- Organizar el trabajo con los conjuntos numéricos no solo a partir de los modelos abstractos (estructuras) sino de los sistemas (conjunto de números) que son modelizados.
- Analizar las características diferentes de las definiciones de los conjuntos numéricos.
- Poner en discusión el concepto de naturaleza de un número más allá del tipo de representación semiótica elegida.
- Estudiar la construcción de los conjuntos numéricos desde \mathbb{N} a \mathbb{R} .
- Conocer la expresión canónica de los elementos de los distintos conjuntos numéricos y otras expresiones no canónicas, así como las formas de relacionar unas con otras.

- Comprender que el sentido de la definición de un conjunto numérico no se refiere a su representación efectiva sino a la posibilidad de ser escrito de esa manera.
- Caracterizar con precisión la expresión decimal de los elementos de cada uno de los conjuntos.
- Definir el conjunto de números decimales D tanto como subconjunto de Q (fracciones decimales) como a partir de su expresión decimal (número finito de cifras decimales, aunque sean nulas).
- Reflexionar sobre las propiedades y manipulaciones que pueden ser realizadas o no según el conjunto de referencia en el cual se esté trabajando.

REFERENCIAS

ETCHEGARAY, S.; SAIZ I. (2016): Espacio curricular: Enseñanza de la Aritmética. Especialización docente de nivel superior en Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria. <http://nuestraescuela.educacion.gov.ar/wp-content/uploads/2016/04/Programa-Ense%C3%B1anza-de-la-Aritm%C3%A9tica-Secundario1.pdf> Recuperado de Internet el día 04/05/2016.

GOROSTEGUI, EDITH (2012): Mémoire de Recherche: Las Prácticas de escritura en el trabajo algebraico de alumnos de secundaria. Université de Reims Champagne-Ardenne. IUFM Champagne-Ardenne. Francia.

SAIZ, I; GOROSTEGUI, E; VILOTTA, D. (2011): Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza en Educación Matemática Vol. 23; Número 1. Abril 2011. México.

SOCAS, MARTÍN (2001): Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales. Universidad de Laguna- España.