

LA QUIMERA DEL ÁUREO

Paloma M^a Puerto Moyano, *I.E.S. Florencio Pintado, Peñarroya (Córdoba)*

Pedro Carlos Moreno Ferrari, *I.E.S. Averroes, Córdoba (Córdoba)*

1. RESUMEN.

De todos es conocido el Número Áureo y las propiedades especiales que se le han atribuido durante años. Esto ha llegado a perpetuar la idea de que es una proporción "mágica" y "divina", presente en todo lo que nos rodea, y de que existe un orden especial en la naturaleza con su origen en los números.

La aparición de otros números y proporciones notables, como la cordobesa o los Números Metálicos, lejos de rebatir esta idea, la han reforzado.

Esto se trata en multitud de ocasiones de una forma incompleta y poco rigurosa apareciendo así en artículos, blogs e incluso conferencias universitarias.

Tenemos que evitar caer en esto y presentar este tema aplicando el método científico, por supuesto adaptándonos al nivel de nuestro alumnado.

Nivel educativo: ESO y Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN.

La Proporción Áurea o Número Áureo ha sido considerada a lo largo de la historia por músicos, escultores, pintores y arquitectos como proporción ideal, símbolo de belleza y perfección, utilizándose como base de numerosas obras artísticas. Por otro lado, muchos investigadores revelan su presencia en la naturaleza: plantas, cuerpo, universo, poblaciones, etc., incluso hay estudios que demuestran su existencia en índices bursátiles.

Aunque el Número Áureo, presentado en sus distintas formas (razón proporción, rectángulo, etc.) no es un contenido propiamente dicho del currículum en ningún curso de la ESO ni del Bachillerato, lo cierto es que sí se expone muchas veces, para motivar y despertar la curiosidad del alumnado.

Además, forma parte de los contenidos requeridos para las oposiciones de Secundaria dentro del bloque de la Geometría, en el tema nº 36. "Proporciones notables. La razón áurea. Aplicaciones."

Nosotros queremos demostrar a través de esta comunicación, por un lado que este tema se trata en muchas ocasiones con más "misticismo" que "rigurosidad"; y por otro lado, que este número no solo no es único, sino que existen infinitos números que cumplen muchas de las propiedades que se utilizan para argumentar su "importancia". Como se suele decir comúnmente, y en este caso nunca mejor dicho, intentaremos evidenciar que "no es oro todo lo que reluce".

Para ello en primer lugar, y aunque será conocido por la mayoría de los asistentes, vamos a introducir el Número Áureo y recordar dichas propiedades.

2. LA PROPORCIÓN ÁUREA.

Existen diversas formas de introducirlo y definirlo. Una de ellas es a través de proporciones, entendiéndose por proporción en un rectángulo al resultado de dividir el lado mayor entre el lado menor (el largo entre el ancho).

Pues bien, de todos los rectángulos R_1 de dimensiones a y b (con a mayor que b , si fueran iguales sería un cuadrado; y los dos distintos de cero), se llama Rectángulo Áureo a aquel que al quitarle el cuadrado de lado b , el rectángulo resultante R_2 , de medidas b (largo) y $a - b$ (ancho), cumple la misma proporción entre sus lados que el original. Entonces se dice que R_1 y R_2 son rectángulos Áureos y a esa proporción constante es a la que se llama Proporción Áurea.

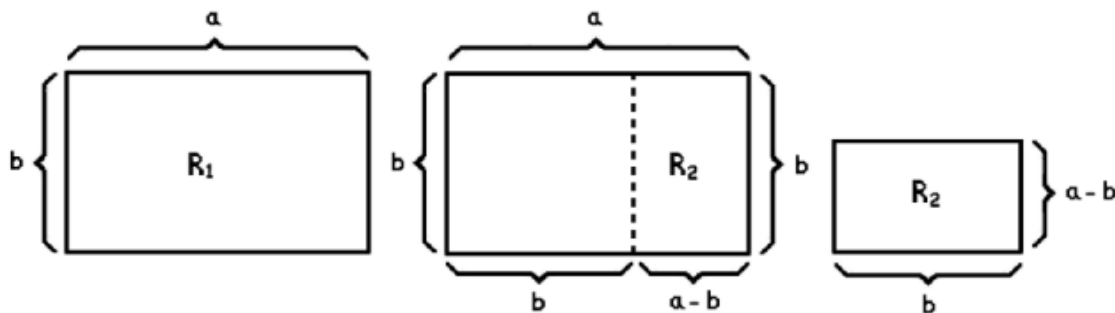


Figura 1. Rectángulos Áureos.

(Se puede dividir porque como no es un cuadrado $\frac{a}{b} \neq 1$ y por tanto $\frac{a}{b} > \frac{a-b}{b}$) (Definición 1)

2.1. VALOR DEL NÚMERO ÁUREO.

De la fórmula constante anterior (Definición 1) podemos obtener el valor del Número Áureo. Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro por b , y operando, obtenemos finalmente una ecuación fácil de resolver:

$$\frac{a}{b} = \frac{a-b}{b} \quad (Definición 2)$$

Resolviendo dicha ecuación de segundo grado se obtiene que la solución positiva, número irracional algebraico (cuadrático), es:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

2.2. PROPIEDADES DEL NÚMERO ÁUREO.

Por un lado, la presencia de este número en la naturaleza y sus propiedades han sido ampliamente estudiadas a lo largo de la historia: Vitruvio, Fibonacci, Luca Pacioli (primero que lo relaciona con algo divino y le da el nombre de Proporción Divina), Kepler, Charles Bonnet, Martín Ohm, Adolf Zeising, Fechner, Mark Barr (quién le dió su actual nombre), Matila Ghyca, Penrose, Derek Haylock, etc. Por otro lado se ha utilizado en numerosas ocasiones en el arte: Leonardo Da Vinci, Durero, Hambidge, Le Corbusier, Dalí, Rafael de la Hoz, etc.

Veamos algunas de sus propiedades más conocidas.

- Φ es positivo y la otra solución de la ecuación obtenida en la Definición 2, número negativo, es el opuesto del inverso del Número Áureo.

—(Propiedad 1)

- Es el límite de los cocientes de la llamada Sucesión de Fibonacci $F(n)$ construida de forma recurrente como:

(Sucesión 1) ——— (Propiedad 2)

- Se puede obtener mediante la fracción continua siguiente:

————— (Propiedad 3)

- Se puede obtener mediante raíces anidadas de la forma:

————— (Propiedad 4)

1. LA VERDAD SOBRE EL NÚMERO ÁUREO.

De sobra son conocidas las numerosas aplicaciones, obras y milagros del Número Áureo que han aparecido a lo largo de la Historia y que se siguen difundiendo en la actualidad, y muchas más que siguen apareciendo.

En la historia de la Matemática el valor de lo nuevo, lo mágico, lo rompedor ha ido moviendo sus propios cimientos. La aparición de los irracionales (literalmente “que carece de razón”), del cero, del infinito, de las geometrías no euclídeas, de los fractales, etc. supusieron que entraran en contradicción la matemática oficial con los resultados obtenidos. En la mayoría de los casos su estudio pormenorizado ha repercutido en el avance de la matemática, ubicando éstos donde le corresponde tras una fase de sorpresa, sublimación u ostracismo.

Sin embargo es importante señalar que también numerólogos, pseudocientíficos y teólogos han empleado y utilizado con frecuencia la matemática para teñir sus pensamientos de un carácter científico y así poder dotar a sus afirmaciones de una mayor fuerza.

En nuestra opinión, el primero en hacer esto con el Número Áureo fue Luca Pacioli. Cuenta la historia que en Venecia Luca frecuentó la “Scuola di Rialto” en la que enseñaba lógica y matemática Domenico Bragadin, que le impregnó el pensamiento típico de los Humanistas, que ven en la matemática y la geometría un medio perfecto para acercarse a Dios. Esto pudo influir también en su deseo de hacerse fraile. La obra de Pacioli oscila así entre dos concepciones de la matemática: una pragmática y otra especulativa, incluso mística, que no duda en adherirla a las sugerencias místico-mágicas del platonismo humanista originado en la Academia de Marsilio Ficino.

Inteligente y estudioso, buen conocedor de los sistemas comerciales y económicos de la época, intuyendo el auge del pensamiento científico y racional,

encontró la forma de acercar las creencias de la Iglesia a las Matemáticas, "divinizando la Proporción Áurea", siendo el primero en hablar de ella en términos de Proporción Divina. Esto aparece en su obra más influyente, "De Divina Proportione" (De la Divina Proporción), cuyas ilustraciones encargó a su amigo Leonardo da Vinci, y donde lo justifica con 5 de sus propiedades:

- 1) Su unicidad la compara con la unicidad de Dios.
- 2) Está definido por tres elementos (a, b y a-b) como la Trinidad.
- 3) Su inconmensurabilidad (número irracional) y la de Dios son equivalentes.
- 4) Su autosimilaridad, que se puede enlazar con la idea de fractal, la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.
- 5) Dios dio ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro; el Número Áureo dio ser al dodecaedro (los 12 vértices de los tres Rectángulos Áureos inscritos coinciden con los centros de las caras de un dodecaedro).

Ya fuera una mera buena "estrategia de marketing" o un simple "juego", a los que también era muy aficionado, el caso es que reforzado por ese sentimiento heredado de los pitagóricos y Platón, su legado se ha mantenido hasta nuestros días, en los que se sigue difundiendo la idea de la existencia del Número Áureo, como "único", "especial" y "generador" de la naturaleza, de todo.

Como hemos dicho en la introducción, veremos en primer lugar qué parte de "verdad" y "rigurosidad" hay en todo esto.

3.1. MITOS SOBRE EL NÚMERO ÁUREO.

Hoy en día Internet se convierte en una herramienta de difusión de esta "mitificación" en muchos casos. Innumerables acepciones del 1, 2, 3, 7, 12 o 60 pueblan la red para encontrar divinidades escondidas o explicaciones del mundo. Igualmente pasa con el Número Áureo.

Casi todas las páginas en Internet hablan en los mismos términos de sus propiedades "mágicas", sin hacer muchas comprobaciones, dando por hecho muchas afirmaciones que son falsas, o meramente absurdas y carentes de rigurosidad.

Pero también cada vez más están aumentando las críticas, no ya al Número Áureo en sí, sino a su atribuido carácter místico y divino, generador del mundo, y a la falta de rigor científico en las pruebas que siguen manteniendo esta idea.

Veamos algunos ejemplos:

➤ En la vida cotidiana: Hay numerosos ejemplos que se dan como Rectángulos Áureos y que realmente no lo son. Si medimos nuestro DNI (8,54 cm de largo por 5,4 cm de ancho) su proporción da 1,581481..., que no coincide con la Áurea. Se podría decir que es una aproximación, pero es que casi cualquier rectángulo que no sea ni muy "achatado" ni muy "alargado", tendrá sus proporciones entre 1 (cuadrado) y 2 (rectángulo doble largo que ancho), o ajustando más, será probablemente un número irracional en torno a 1,5.

En la web del Instituto de Investigación de la Creación (ICR, Dallas, Texas) encontramos un artículo titulado "Formas, números, patrones y la Divina Proporción en la creación de Dios", en el que su autor Fred Wilson incluye numerosos ejemplos de la vida cotidiana en los que aparece la Proporción Áurea, algunos de los cuáles hemos recogido en la Tabla 1.

ÍTEM	TAMAÑO	PROPORCIÓN
Tarjetas crédito	8,5 x 5,4 cm	1,57407...
Naipes de brigde	9 x 5,8 cm	1,55172...
Naipes de póquer	9 x 6,4 cm	1,40625
Tarjetas postales (EEUU)	14 x 9 cm	1,55555...
Placas interruptores	4,75 x 2,75 cm	1,72727...
Blocs de notas	7x5 y 5 x 3 pulgadas	1,4 y 1,66...

Tabla 1. Proporciones cotidianas (Fuente: blog Mitos y timos, la desproporción áurea)

Podemos observar que algunas de estas similitudes son, cuanto menos, sospechosas de salirse de los patrones divinos.

Por otro lado, mucho más numerosa sería la lista de los objetos que ni se acercan: papeles para impresión fotográfica de 3,5 x 5; el de 5 x 7 y el de 8 x 10 (en pulgadas); las resmas de oficina de 8,5 x 11 o de 8,5 x 14 pulgadas; pantallas de computadora (4:3), que tienen relación de 1,333 al igual que las pantallas de cine hasta que se popularizaron los formatos cinemascope y Panavision de pantalla ancha, cuya relación es de 2,666.

➤ En el Arte: Por ejemplo Vitruvio dice sobre las proporciones del cuerpo humano (libro III): "Compuso la naturaleza el cuerpo del hombre de suerte que su rostro es la décima parte de su altura. Toda la cabeza es la octava parte del hombre. Lo mismo es por detrás desde la nuca hasta lo alto. Desde lo alto del pecho hasta la raíz del pelo es la sexta parte, hasta la coronilla la cuarta...". Es claro que habla de proporciones, pero no de la Áurea. De hecho, un estudio de Einard González y Laura González (IES Ramón Cabanillas, Galicia) sobre las medidas que se dan como Áureas en el dibujo del Hombre de Vitruvio, demuestra que muchas no son ciertas. Por ejemplo, contrariamente a lo afirmado en numerosas ocasiones, nos dicen: <<En el dibujo de Leonardo, el vértice superior del cuadrado y la circunferencia se encuentran relativamente separados. En la construcción en Razón Áurea, el vértice y la circunferencia se encuentran muy cercanos. Este hecho y las construcciones realizadas, parecen indicar que Leonardo no realizó su dibujo del Hombre de Vitruvio con la intención de que el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia se hallasen en Razón Aurea>>.

La aparición del Número Áureo en el Partenón también presenta sus carencias. Según el blog mitosytimos.blogspot.com.es algunas de las dudas que suscita son: si Φ era tan importante para Fidias, ¿por qué lo incorporó únicamente en el extremo más pequeño del edificio?; ¿por qué el rectángulo de planta está en proporción $7/16=0,4375$, cuyo recíproco es 2,286?; ¿por qué no lo había hecho con la relación Φ o su recíproco?; el hecho de que el Partenón se encuentre en una colina hace que ninguna de sus características rectangulares se ven como rectángulos desde el suelo; si se usaron columnas que se estrechan hacia la parte superior para generar una ilusión que hace parecer más alta a la estructura, ¿no anula esto el supuesto propósito de utilizar el Rectángulo de Oro como rectángulo más atractivo?

Sobre el Partenón también nos dice Stephen Skinner, en su libro "Geometría sagrada", entre otras cosas, que las dimensiones exactas son de 30,86 m de ancho por 13,7 m de alto, que al dividir las da 2,25, muy distinto del valor de Φ .

➤ En la Naturaleza: Por ejemplo, las supuestas espirales Áureas de las conchas de caracoles. Basta superponer las espirales áureas geométricas con las reales para dudar de la veracidad de esta hipótesis (Figura 2).

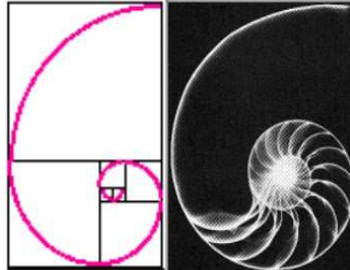


Figura 2. Espiral Áurea y concha de caracol (Fuente: blog Mitos y timos, la desproporción áurea)

También podemos considerar, así mismo, la supuesta preferencias de las flores a tener un número de pétalos que encajen en la sucesión de Fibonacci. Se aportan ejemplos muchas veces de variedades que lo cumplen, olvidando, intencionadamente o no, a todas aquellas que no lo hacen.

Igualmente podemos hablar del problema de los conejos representados por la Sucesión de Fibonacci, que se muestra como realidad haciendo fértiles a los conejos a los dos meses. Sin embargo la cunicultura afirma cosas más complejas: un periodo de gestación aproximado de alrededor de 30 días, una edad fértil aproximada de 4 o 5 meses. Todo esto sin tener en cuenta la raza, el tipo de cría, etc. que afecta a la crianza de los conejos.

Y por último, una de las noticias más llamativas de los últimos años ha sido las declaraciones del ginecólogo de la Universidad de Leuven en Bélgica, Jasper Vergtus (publicadas en el diario británico "The Guardian", edición online, en Agosto de 2012), que asegura que existe una relación entre el Número de Oro y el sexo femenino. El investigador sugiere que cuando las mujeres son más fértiles, entre los 16 y los 20 años, las dimensiones del útero se acercan a 1,6 (una aproximación cercana al Número Áureo).

Sobre esto, el profesor Fernando Blasco nos dice en su blog de Matemáticas Grado-361: << ... da la sensación de que Vergtus ha estado haciendo operaciones y mediciones hasta que alguna de ellas le cuadrase con la Razón Áurea. Como pasatiempo está bien ver si algo cumple la Divina Proporción, pero eso no es ciencia >> .

3.2. OTROS NÚMEROS DESTACADOS.

Después de observar la falta de "rigurosidad", veamos la "no unicidad".

En los últimos tiempos han ido apareciendo otros números que también han sido considerados "notables" o "importantes", que se han utilizado en el arte, que aparecen en la naturaleza y que cumplen propiedades matemáticas iguales o similares a las del Número Áureo.

3.2.1 Otros números variados y valorados.

Algunos números destacados, irracionales algebraicos, conocidos en los últimos tiempos son:

➤ El Número Cordobés $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, descubierto por Rafael de la Hoz, que es solución de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ y que dicen está presente en pinturas y edificios emblemáticos de Córdoba como la Mezquita (siglo X), el Mihrab, la Sinagoga (siglo XV) y la Iglesia de la Merced (siglo XVIII); y del mundo, como el Partenón, el Arco de L'Etoile de París y la pirámide de Kheops.

➤ La Proporción de Plástico $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, que es una generalización del ideal de armonía Áurea a las tres dimensiones, realizada y utilizada por el arquitecto y monje Benedictino Hans Dom van der Laan (1904-1991 d.C.) y que es la única solución real de la ecuación $x^3 - x^2 - 1 = 0$.

➤ La Proporción Gallega, obtenida a raíz de un interesante trabajo coordinado por la profesora Covadonga Rodríguez-Moldes, del IES Mugaros, con estudiantes de 1º y 2º de la ESO que consistía en buscar una proporción que se inscribiera en la fachada de la Catedral de Santiago y la bandera gallega. Así la definieron como la relación entre el segmento que une dos vértices opuestos de un hexágono y el su lado, dando como resultado $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, número que superó en su particular test de Fechner al Número Áureo y al Cordobés.

Además de estos existe una particular familia de números que reconoce además al Número Áureo como uno de sus miembros.

3.2.2. Los Números Metálicos.

Los Números Metálicos fueron descritos por primera vez por la matemática argentina Vera Martha Winitzky de Spinadel en 1997 y son todos los "números cuadráticos" $\Phi_{p,q}$ que se obtienen como solución de generalizar la ecuación de segundo grado de la *Definición 2* para cualesquiera p, q números naturales.

———— de *Definición 2*

NOMBRE	p	q	VALOR
Oro	1	1	1,618033989...
Plata	2	1	2,414213562...
Bronce	3	1	3,302775638...
Cobre	1	2	2
Níquel	1	3	2,732050808
Platino	2	2	2,732050808...

Tabla 2. Algunos números metálicos.

Se demuestra fácilmente que cumplen todas las propiedades anteriormente destacadas del Número Áureo.

➤ Se mantiene la proporción en "Rectángulos Metálicos".

- ——— que es la *Definición 1*

➤ y ambas soluciones son inversas: — *Propiedad 1*

➤ Son límite de los cocientes de la Sucesión de Fibonacci generalizada:

tal que — *Propiedad 2*

para cualesquiera dos valores iniciales que se tomen $F_{p,q}(1)$ y $F_{p,q}(2)$.

➤ Se puede obtener mediante la fracción continua *Propiedad 3*:

—

➤ Se obtienen mediante raíces anidadas *Propiedad 4*:

—

1. GENERALIZACIÓN A TODOS LOS NÚMEROS REALES.

Las propiedades anteriores se obtienen directamente de la definición, por lo que realmente se cumplen para cualquier número definido de la misma forma.

Sea N un número real positivo:

➤ Existen p, q números reales tales que N es la solución positiva de la ecuación:

— (*Definición 2*)

Basta fijar p o q y despejar el otro de la ecuación anterior con el valor de N .

➤ Existen a y b números reales tales que — (*Definición 1*)

Basta fijar a o b y despejar el otro de la proporcionalidad anterior con N .

De manera que se puede demostrar que: "Cualquier número real N cumple las propiedades 1, 2, 3 y 4, las mismas que el Número Áureo y los Números Metálicos".

También otras muchas que no podemos presentar aquí por su extensión, pero sobre las que animamos a estudiar e investigar.

1. CONCLUSIONES.

Según la RAE <<quimera, es aquello que se propone a la imaginación como posible o verdadero, no siéndolo>>.

Así, la pregunta que nos planteamos en su origen es: ¿Realmente el Número Áureo está presente en la Naturaleza y forma parte intrínseca de nuestro cuerpo e ideales, y luego lo estudiamos y lo utilizamos en el arte?, o por el contrario ¿dado que se ha estudiado y utilizado en el arte, se busca en la naturaleza y nuestro ideal estético se ha acostumbrado a él?. Y por añadidura, ¿ocurre lo mismo con los otros números notables que vamos descubriendo como el número cordobés? ¿Estamos cayendo en nuestra propia quimera de los números?... Nosotros creemos que sí.

Es un hecho que nuestra formación matemática nos lleva a la búsqueda de patrones y modelos, cumpliendo la cita de Hardy que nos dice: <<Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser hermosos; las ideas, como los colores o las palabras, deben ensamblarse de forma armoniosa>>. Esto, y el interés en motivar a nuestro alumnado, nos induce a presentar estos números como patrones estéticos.

Además, como personas, el profesorado también recibimos el impacto de una cultura en la que está presente esta idea desde un punto de vista estético, religioso y comercial. La frase <<Los sentidos se deleitan con las cosas que tienen las proporciones correctas>>, puede ser atribuida a Santo Tomás de Aquino, como así es, pero también a cualquier diseñador de moda.

Por tanto si tratamos el tema del Número Áureo de forma parcial y poco rigurosa, estaremos contribuyendo a la promoción de una cultura científica sesgada. Además, presentar el Número Áureo dándole ese cariz de unicidad, transmite transversalmente otras enseñanzas más cercanas a las que pretendió difundir en su momento Luca Pacioli, y que de alguna forma son la idea de Dios y del valor individual por encima de todo, tan propio del capitalismo imperante.

Con todo esto no queremos decir que el Número Áureo y los Números Metálicos no tengan propiedades "especiales". Según Vera de Spinadel, existen muchas otras propiedades, estudios y aplicaciones que sería demasiado extenso incluir: cuasi-cristales, fractales, etc.

Lo que decimos es que no lo son por las propiedades que normalmente se presentan, y que ya hemos visto que se cumplen para cualquier número real positivo. Y que en consecuencia, como docentes, nos corresponde tomar una decisión:

El que quiera seguir haciéndolo como hasta ahora, por dejadez o por interés en que se sigan manteniendo esas ideas, que sepa que está transmitiendo algo incompleto, ya que como hemos dicho las propiedades no son exclusivas de ese número. Allá cada uno/a con su conciencia.

El que decida no dar nada del número áureo puede hacerlo sin problema, puesto que como hemos dicho no está en los contenidos exigidos.

Y la tercera opción, a la que apelamos, es que se aplique el método científico en el tratamiento de este tema, que se exponga de forma correcta y completa, es decir, que siempre que se presente el Número Áureo se complemente ampliándolo en un segundo paso con el número cordobés, gallego, los Números Metálicos, y finalmente se generalicen sus propiedades para todos los números reales, al menos en cuanto a las propiedades descritas, poniendo el valor en que existen multitud de números y conceptos matemáticos, que cada uno será importante para unas cosas, pero que ninguno es el origen de todo. Y que, por supuesto, existen muchos más por descubrir.

En definitiva, que demos al Número Áureo de una forma rigurosa y científica, el lugar que ocupa en las matemáticas, como bien nos dice este XVI congreso Thales: NI MÁS, NI MENOS.

2. REFERENCIAS.

ALSINA, CLAUDI (2007). *El número de oro es plano. ¡Pásalo!*, artículo Revista SUMA, Febrero 2007, pp. 75-78. <http://revistasuma.es/IMG/pdf/54/075-078.pdf>

FRED WILSON, M.S. (2002) *Shapes, Numbers, Patterns, And The Divine Proportion In God's Creation*. Acts & Facts, 31 (12).

<http://www.icr.org/article/shapes-numbers-patterns-divine-proportion-gods-cre/>

GALO SÁNCHEZ, J.R. (2004). *La Proporción cordobesa o humana*, artículo Matemáticas Interactivas Descartes 2D, INTEF, MECD.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/belleza/canoncordobes.htm

GONZALEZ MILLOS, E. y GONZÁLEZ OTERO, L. *La razón Áurea en el Hombre de Vitruvio*, Cuadernos de Matemáticas, IES Ramón Cabanilla, Xunta de Galicia.

http://centros.edu.xunta.es/iesramoncabanillas/cuadmat/r_aurea.htm

HOZ ARDERIUS, R. de la (1996). *La proporción cordobesa*. Conferencia presentación especial VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "THALES"

PACIOLI, LUCA (1991). *La Divina Proporción*. Ediciones Akal, S. A., Madrid

RODRÍGUEZ-MOLDES REY, C. (2012). *A decadencia dun mito estético: o rectángulo de moda fala galego*, Revista Escolar de la OIM, nº 45

<http://www.oei.es/oim/revistaويم/numero45/Adecadenciaesteticopdf>

SPINADEL, V. W. de (2003). *La familia de números metálicos*, Cuadernos del CIMBAGE, nº 6, pp. 17-44.

SKINNER, S. (2007). *Geometría sagrada: Descifrando el código*, GAIA, 2007

<http://mitosytimos.blogspot.com.es/2012/08/la-desproporcion-aurea.html>

<http://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2012/aug/14/golden-ratio-uterus>

<http://blogs.cadenaser.com/grado-361/author/fernando-blasco/page/6/>