# EXPERIENCIA FORMATIVA PARA DESARROLLAR UNA COMPETENCIA DIDÁCTICO-MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESORES

**Belén Giacomone y Juan D. Godino**
*Universidad de Granada*

## RESUMEN.

En este trabajo se presenta el diseño, la implementación y los resultados de una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. El objetivo es desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico, esto es, identificar y discriminar los tipos de prácticas, objetos y procesos puestos en juego en la resolución de tareas matemáticas que, en este caso, involucran el uso de visualizaciones. La acción formativa se apoya en la aplicación de herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico. Esta competencia permitirá al docente comprender los procesos de aprendizaje matemático y gestionar potenciales conflictos. Los resultados revelan la complejidad que implica el logro de esta competencia y su importancia para el desarrollo profesional docente.

**Nivel educativo**: formación de profesores (universidad)

## 1. INTRODUCCIÓN.

Un foco de atención dentro del campo de la educación matemática consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que debería tener el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea profesional (Depaepe, Verschaffel y Kelchtermanns, 2013; Sowder, 2007). En este sentido, se han ido gestando y articulando diversos modelos teóricos que identifican componentes claves de dicho conocimiento y establecen categorías que permiten describir la práctica docente.

Sin embargo, no existe un consenso general acerca de cómo se debe conceptualizar estas facetas del conocimiento (Depaepe et al., 2013). En este sentido, Godino (2009) destaca algunas limitaciones que presentan estos desarrollos teóricos: “sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas” (p. 19).

Diversos autores han centrado sus trabajos en el desarrollo de estrategias para promover el análisis y reflexión del profesor; brindan herramientas que permiten al profesor ser competente para describir, explicar y valorar, de manera sistemática, su propia práctica (Husu, Toom y Patrikainen, 2008; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012). En estos trabajos se reconoce que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos, pero también, debe ser competente en el uso de esos conocimientos para llevar a cabo el desempeño de la profesión.

Continuando con esta línea de investigación, en este trabajo se pretende mostrar el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática, centrado en el desarrollo de lo que llamamos su *competencia de análisis ontosemiótico.* Dicha competencia refiere al conocimiento y capacidad para identificar y describir las prácticas, objetos y procesos implicados en la resolución de tareas matemáticas escolares.

A continuación, se describe el marco teórico junto con el problema de investigación. En la sección 3, se presenta el tipo de diseño formativo propuesto para el desarrollo de la mencionada competencia, junto con el análisis *a priori* de una de las tareas aplicadas. Seguidamente, se discuten los resultados obtenidos de las respuestas de los futuros profesores a dicha tarea. En la sección 5, se incluyen las reflexiones finales sobre la importancia educativa de esta investigación para la formación de profesores de matemáticas.

## 2. MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.

El desarrollo de la experiencia formativa está apoyada en el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En diversos trabajos (Godino, 2009; Godino et al., 2012; Pino-Fan y Godino, 2015) se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas teóricas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que el profesor de matemáticas debe desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Asimismo, como señala Font (2011), los actuales currículos exigen evaluar por competencias, lo cual supone un reto para los profesores, ya que para la identificación de dichas competencias es necesario hacer análisis pormenorizados de la actividad matemática de los estudiantes. Esto conlleva el problema de cómo conseguir que los profesores tengan/desarrollen competencia profesional (p. 23) para afrontar un currículo por competencias.

De esta manera, en el marco del EOS, el uso de la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Figura 1), implica el desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico, mediante la cual el profesor está capacitado para describir, explicar y evaluar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos.

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo a la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos (Figura 1).

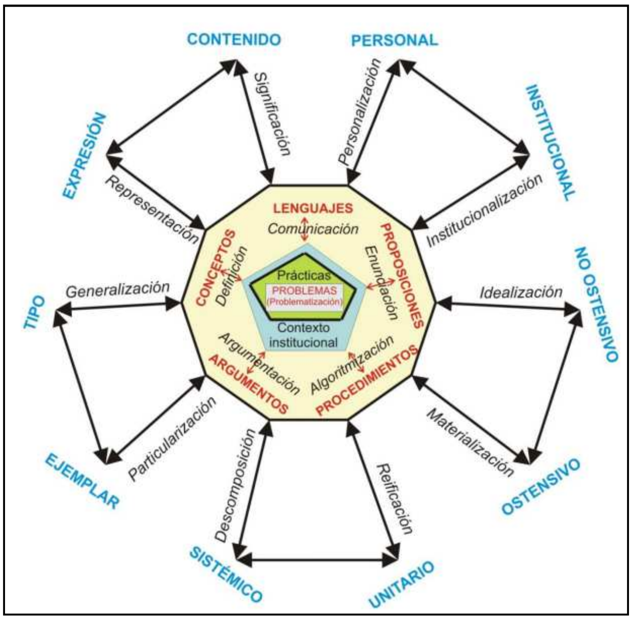



Figura 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

A partir de la Tabla 1, discutiremos el papel que algunos de estos procesos (particularización - generalización; idealización - materialización; significación - representación; personalización - institucionalización) juegan en la aparición de los objetos primarios implicados, tanto en el enunciado de la tarea de la Figura 2, como en la construcción de su solución.
En las secciones siguientes de este trabajo se describe el diseño, implementación y los resultados de una intervención formativa realizada con futuros profesores de educación secundaria.

# 3. DISEÑO INSTRUCCIONAL.

## 3.1. MÉTODO.

En el marco de un máster de formación de profesores de matemáticas de educación secundaria, se ha desarrollado una intervención formativa con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008). El primer ciclo se implementó en el curso del año 2014-2015 con 54 estudiantes, durante 3 sesiones de dos horas cada una; el segundo, se implementó en el curso 2015-2016 con 52 estudiantes con la misma cantidad de sesiones. El análisis de los datos es básicamente cualitativo y está orientado a la identificación de hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.
La información se recogió a partir de las anotaciones del investigador observador (primer autor), las grabaciones en audio de las sesiones y las respuestas de los estudiantes a las tares individuales y grupales.

## 3.2. METODOLOGÍA DE IMPLEMENTACIÓN.

La acción formativa comprende tres fases. En la primera fase, los estudiantes trabajaron de manera individual, a partir de la resolución de una tarea con un dibujo en perspectiva isométrica; seguidamente se presentaron y discutieron en clase las respuestas dadas por los estudiantes. Las consignas de dicha tarea, estaban orientadas hacia una exploración inicial de los significados personales de los estudiantes, sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su capacidad para el reconocimiento de dichos objetos en las prácticas matemáticas.
En la segunda fase, se propuso la lectura y discusión de un documento específico sobre el papel de la visualización en educación matemática (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras, 2015), que incluía un ejemplo del tipo de análisis que se pretende realizar. Seguidamente se implementaron dos tareas trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes, seguidas de su presentación y discusión en el conjunto de la clase. En la tarea 2 se les pedía a los estudiantes que justifiquen las acciones realizadas para construir un cuadrado con GeoGebra; en la tarea 3 (Figura 2) se les pedía a los estudiantes que analicen un problema sobre fracciones, a partir de una solución basada en el uso de diagramas de áreas dada por un alumno.
En la fase 3, los estudiantes trabajaron de manera individual a partir de una cuarta tarea basada en una demostración del teorema de Pitágoras.
Las consignas generales para cada una de las tareas desarrolladas en la segunda y tercera fase, fueron las siguientes:

- Resuelve la tarea.
- Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
- Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

| *Uso e intencionalidad de las prácticas* | *Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea* | *Objetos referidos en las prácticas (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)* |
|---|---|---|
| … | … | … |

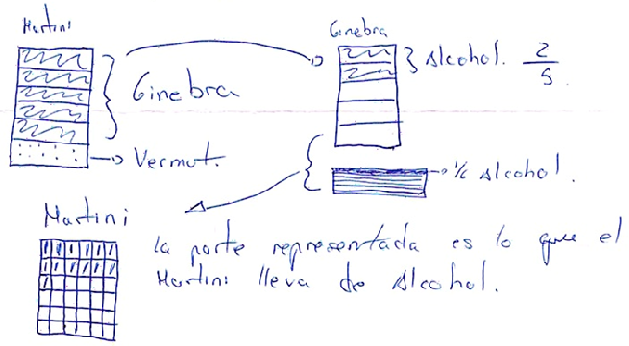
- Además de los procesos de significación indicados en la tabla anterior identifica otros procesos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea.

En este trabajo se presenta el desarrollo una de las tareas utilizadas en el segundo ciclo formativo, durante la segunda fase; para ello, a continuación, se describe el análisis *a priori* dicha tarea, seguido de la discusión de los resultados.

## 3.3. ANÁLISIS *A PRIORI* DE LA TAREA 3.

En la Figura 2 se muestra el enunciado de la tarea 3, implementada en la segunda fase.

**Tarea 3.**
Un estudiante resuelve el siguiente problema:
Problema:
*Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. ¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas.*
Solución:




***a)** ¿Es correcta la solución dada por el estudiante? Justifica la respuesta.*

Figura 2. Fracciones y diagrama de áreas

La secuencia de diagramas de áreas que realiza un estudiante, en la Figura 2, es explicativa del proceso de resolución para alguien que conoce las convenciones asumidas, así como los conceptos y procedimientos implicados. Sin embargo, la justificación y explicación de la solución requiere realizar la siguiente secuencia de prácticas discursivas y operativas:

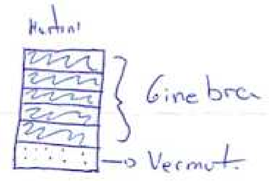
La respuesta es correcta:

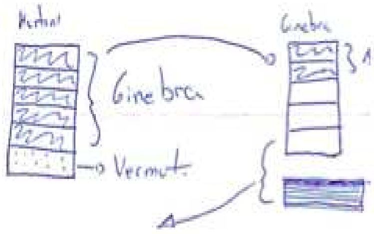
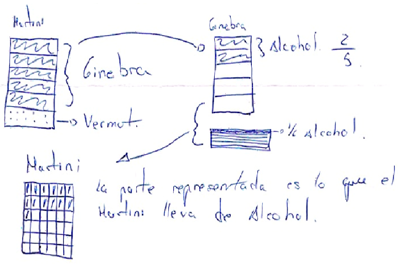
1) La cantidad unitaria de Martini se representa mediante un rectángulo, el cual se divide en 6 partes iguales horizontalmente. De acuerdo a los datos del problema, se marcan: la fracción de ginebra (5/6 del rectángulo unidad) y la fracción de vermut (1/6 del rectángulo unidad) *(primer diagrama en la Figura 2).*
2) Se representa la ginebra como una nueva cantidad unitaria y se divide en 5 partes iguales horizontalmente, siendo 2/5 la fracción de alcohol en la ginebra *(señalado con una flecha en la Figura 2).*
3) Se representa el vermut como una nueva cantidad unitaria y se divide en 6 partes iguales horizontalmente, siendo 1/6 la fracción de alcohol en el vermut *(señalado con una flecha en la Figura 2).*
4) Para poder sumar las cantidades de alcohol en total, ambas partes se deben expresar con la misma unidad de medida *(en la Figura 2, esto está señalado con la flecha que une la cantidad unitaria de ginebra y vermut*).
5) Se dividen las 2 partes de alcohol en la ginebra en 6 partes iguales, obteniendo 12 partes de alcohol en la ginebra.
6) La cantidad de alcohol del Martini será 12+1=13 partes iguales.
7) La representación inicial de Martini se debe medir con la misma unidad que se miden las cantidades de alcohol, para lo cual se divide a cada una de sus 6 partes representadas inicialmente, en 6 partes iguales, obteniendo 36 rectangulitos.

8) Se representan las 36 padres como cuadraditos y se pintan 13. La representación final es la respuesta al problema, siendo la fracción de alcohol 13/36.

La Tabla 1 sintetiza el análisis ontosemiótico (consignas) que se pretende que los estudiantes logren durante el desarrollo de la tarea, el cual fue usado para apoyar la puesta en común. Se puede observar que tanto el enunciado como la resolución de la tarea son descompuestos en unidades de análisis.

Tabla 1
*Análisis ontosemiótico de la tarea 3*

| **Uso e intencionalidad de las prácticas** | **Enunciado y prácticas elementales para resolver la tarea** | **Objetos referidos en las prácticas** |
|---|---|---|
| Describir la composición del Martini. | Un Martini es un cóctel que se hace con 5 partes de ginebra y 1 parte de vermut. | *Concepto*: un todo unitario de volumen.<br>*Procedimiento*: composición de un todo unitario a partir de partes iguales. |
| Determinar la fracción de alcohol en la ginebra y en el vermut. | Supongamos que 2/5 de la ginebra es alcohol y que 1/6 del vermut es alcohol. | *Concepto*: fracción, como parte de un todo unitario que se divide en partes iguales, de las cuales se individualiza una parte. |
| Enunciar la cuestión problemática de la tarea. | ¿Qué fracción de alcohol lleva un Martini? Resuelve el problema usando un diagrama de áreas. | *Conceptos*: todo unitario, fracción, parte de un todo dividido en partes iguales. |
| Planteamiento de la tarea al futuro profesor. | Responde *¿Es correcta la solución dada por el estudiante? Justifica la respuesta.* | *Situación/problema*: resolver un problema de mezclas (solución esperada); analizar la resolución del estudiante (solución efectiva); comparar ambas soluciones; emitir un juicio valorativo.<br>*Concepto de justificación* de una proposición. |
| Representar diagramáticamente la fracción de ginebra y vermut que componen el Martini. | <u>Solución del estudiante:</u><br><br>1) La cantidad unitaria de Martini ...<br> | *Concepto*: fracción como parte de un todo.<br>*Lenguaje*: paso del lenguaje natural al gráfico.<br>*Proposición*: la figura dada representa la composición del Martini (5 partes de ginebra; 1 de vermut). |
| Representar la fracción de alcohol en la ginebra y el vermut. | 2) Se representa la ginebra ...<br>3) Se representa el vermut ...<br>4) Para poder sumar las cantidades ... | *Concepto*: fracción como parte de un todo.<br>*Lenguaje*: paso del lenguaje natural al gráfico. |

| | | |
|---|---|---|
| | <br> | *Procedimientos*:<br>- descomposición de la unidad de Martini en dos nuevas partes unitarias;<br>- división de las nuevas unidades en partes iguales.<br>*Proposición:* las figuras de la derecha representan las fracciones de alcohol en la ginebra y el vermut. |
| Representa la cantidad de alcohol total en el Martini (responder al problema). | 4), 5), 6), 7) y 8) (...)<br><br> | *Conceptos*: fracción como parte de un todo; unidad de medida<br>*Procedimiento*:<br>- medir las áreas de las fracciones de alcohol con una unidad (1/6 alcohol del vermut);<br>- suma de cantidades.<br>*Proposición*: la figura final representa la respuesta del problema (13/36). |

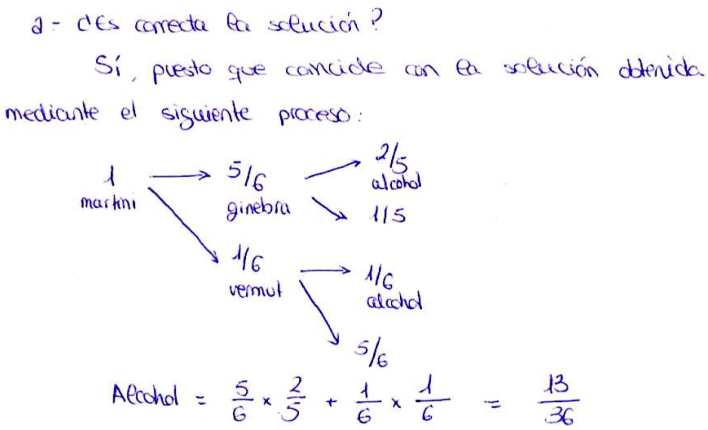
Además de los procesos indicados en la Tabla 1, el sujeto que resuelve el problema con este razonamiento, realiza por un lado, procesos de *materialización* de los conceptos y de las operaciones con fracciones implicadas en el enunciado, y por otro lado, procesos de *composición* de los resultados parciales que va obteniendo. La solución la encuentra finalmente mediante un procedimiento aritmético de conteo de las fracciones unitarias que ha representado en el último diagrama mediante un proceso de *idealización* (la razón del número de cuadraditos marcados al número total de cuadraditos es la fracción de alcohol del Martini).

## 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

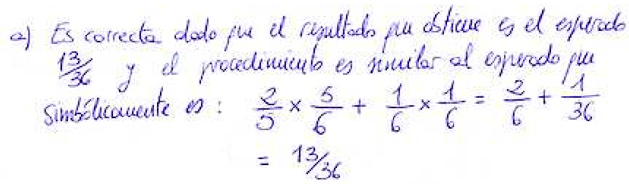
En las tareas previas, los alumnos han manifestado dificultades en el reconocimiento de los objetos matemáticos que participan y emergen en los distintos procesos de resolución. Por lo cual, el foco de discusión se ha centrado en compartir la manera de entender los conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos y los distintos lenguajes que se pueden manifestar en las prácticas matemáticas, como también el papel que desempeñan en las mismas.
En esta tercera tarea implementada (Figura 2) se trata de que los futuros profesores valoren la respuesta dada por un estudiante, poniendo en juego los conocimientos adquiridos en la etapa formativa previa; pero, ¿dicha solución, es suficiente para emitir un juicio?
En la puesta en común de esta tarea se ha podido compartir que para que el estudiante realice una verdadera actividad matemática es necesario pedirle la justificación del procedimiento, ya que de este modo debe explicitar los conocimientos matemáticos implicados en la resolución.

En general, los profesores en formación resuelven el problema del Martini utilizando otros procedimientos diagramáticos y luego comparan los resultados obtenidos con la solución de la Figura 2. No son capaces de elaborar una justificación apoyándose en el diagrama de áreas, ya que representar la suma y multiplicación de fracciones con este tipo de representaciones, requiere un trabajo matemático poco habitual. A continuación se muestran ejemplos prototípicos que permiten ilustrar este hecho didáctico.

**E$_1$.**




**E$_2$.**




El verdadero desafío que implica esta justificación y la oportunidad de involucrar distintos tipos de diagramas en la resolución, crea un escenario para llamar a la reflexión profesional. Ya sea el diagrama de área, árbol o aritmético, los conceptos que se movilizan son distintos; como afirma Sherry (2009, p. 68), lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio; no está en los propios diagramas.

La puesta en común permite compartir el papel que desempeñan los diagramas en el razonamiento matemático: los procedimientos involucrados en diagramas de áreas tienen rasgos de menor generalidad que en el diagrama en árbol. La generalidad que se logra con los diagramas algebraicos no se puede conseguir con otro tipo de diagramas, lo que explica el uso tan extendido del razonamiento algebraico en la práctica matemática (Godino et al., 2015).

## 5. REFLEXIONES FINALES.

El tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico. El análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas que se

propone, permite centrar la atención en la dialéctica que existe entre los objetos ostensivos (representaciones materiales) y los objetos no ostensivos (ideales) implicados necesariamente en la solución comprensiva y competente de las tareas (Tabla 1). Además, permite mostrar que el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas, como también el progreso en la tarea.
La discusión de resultados y las reflexiones realizadas durante todo el ciclo formativo, nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictiva la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.
Finalmente, a pesar de la cantidad y difusión de trabajos sobre la formación de profesores, el cambio significativo continúa siendo un desafío para muchos profesores (Jaworski y Wood, 2008). El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje.
Este proceso analítico / reflexivo se puede interpretar como una actividad metacognitiva, ya que se realiza sobre los conocimientos puestos en juego en las prácticas matemáticas, o sea, se trata de una reflexión sobre la cognición, una meta-cognición (D'Amore, Font y Godino, 2007).

### RECONOCIMIENTO.

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

## REFERENCIAS.

D'AMORE, B., FONT, V. y GODINO, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

DEPAEPE, F., VERSCHAFFEL, L. y KELCHTERMANNS, G. (2013). Pedagogical content knowledge: a systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematical educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25.

FONT, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión, 26,* 9-25.

GODINO J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

GODINO, J. D., GIACOMONE, B., WILHELMI, M. R., BLANCO, T. F. y CONTRERAS, A. (2015). Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático. *Departamento de Didáctica de la Matemática.* Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

GODINO, J. D., RIVAS, H., ARTEAGA, P., LASA, A. y WILHELMI, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

GODINO, J. D., RIVAS, M., CASTRO, W. y KONIC, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

HUSU, J., TOOM, A. y PATRIKAINEN, S. (2008). Guided reflection as a means to demonstrate and develop student teachers' reflective competencies. *Reflective Practice, 9*(1), 37-51.

KELLY, A. E., LESH, R. A. y BAEK, J. Y. (Eds.) (2008*). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York: Routledge.

JAWORSKI, B. y WOOD, T. (Ed.) (2008). *The international handbook of mathematics teacher education.* Rotterdam: Sense Publishers.

PINO-FAN, L. y GODINO, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

PONTE, J. P. y CHAPMAN, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publisher.

SCHOENFELD, A. y KILPATRICK, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publisher.

SHERRY, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundations of Science, 14*, 59-74.

SOWDER, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.