



RECONOCIMIENTO DE NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO EN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Juan D. Godino, *Universidad de Granada*
Ángel Contreras, *Universidad de Jaén*
Antonio Estepa, *Universidad de Jaén*
Miguel R. Wilhelmi, *Universidad Pública de Navarra*

RESUMEN.

Se propone la realización de un taller para promover en los profesores de primaria y secundaria el desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y el reconocimiento de distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La actividad práctica a realizar se basa en la resolución de un conjunto de tareas que ponen en juego conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental y la puesta en común de las soluciones. La visión ampliada del álgebra escolar que se propone desarrollar tiene en cuenta los procesos de generalización, simbolización, modelización estructural y funcional, así como el cálculo analítico, y permite una articulación coherente entre el pensamiento algebraico en educación primaria y secundaria.

Nivel educativo: Profesores de educación primaria y secundaria

1. INTRODUCCIÓN.

La promoción del razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos se propone como un objetivo importante en diversas orientaciones curriculares (NCTM, 2000), para lo cual se asume una visión ampliada de la naturaleza del álgebra escolar, no limitada al manejo de expresiones algebraica (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014). Ello supone un reto para la formación de los profesores de matemáticas ya que usualmente los planes de formación no contemplan el desarrollo de dicha visión sobre el álgebra. Aunque algunos autores (Lins & Kaput, 2004), en la agenda de investigación que proponen en su capítulo sobre "Early Algebra", sugieren que se debe poner "especial atención a la formación de profesores" (p. 60).

El objetivo de este taller es la implementación de una actividad práctica orientada al reconocimiento de los rasgos característicos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), que avance en la capacitación del profesor para la promoción del pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos. Se propone la resolución de un conjunto de tareas propias de educación primaria y secundaria y el reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la actividad matemática implicada, basados en la identificación de objetos y procesos algebraicos característicos. La actividad puede ser de interés tanto para profesores de educación primaria como de secundaria, ayudando a progresar en

la articulación de los conocimientos didáctico – matemáticos (Godino, 2009) sobre álgebra de dichas etapas educativas.

En este documento se describe la actividad diseñada, la cual está basada en la resolución en equipos de un cuestionario sobre conocimientos didáctico – matemáticos sobre RAE (cuestionario CDM – RAE, publicado en Godino, Wilhemi, Neto, Blanco, Contreras, Díaz-Batanero, Estepa y Lasa, 2015) y la puesta en común de dichos conocimientos. Previamente se hace una síntesis de las características del RAE y los niveles de razonamiento propuestos en Godino, Neto, Wilhemi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015).

2. CARACTERÍSTICAS DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL.

Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar (Kieran, 2007; Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kaput, 2008). Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica son los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de conceptos, procedimientos etc., (objetos determinados) a clases o tipos de tales objetos. En la perspectiva del “álgebra temprana” (Carraher y Schliemann, 2007; Cai y Knuth, 2011) el reconocimiento de lo general es condición previa de la expresión de dicha generalidad. Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros. Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, el de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y las propiedades de las estructuras que se generan. Con respecto al pensamiento relacional, la investigación sobre álgebra temprana se ha interesado por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual (Carpenter, Levi, Franke, y Zeringue, 2005).

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino, et al. (2014) proponen un modelo para caracterizar el RAE en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica. En Godino et al. (2015) los 3 niveles de algebrización propios de educación primaria se han ampliado con otros 3 niveles que caracterizan la actividad matemática en educación secundaria.

Las características esenciales de los seis niveles de algebrización descritos en Godino et al. (2014) y Godino et al. (2015), junto con el nivel 0 (ausencia de rasgos algebraicos), están basados en las siguientes distinciones:

1) La presencia de “objetos algebraicos” intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).

- 2) El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales.
- 3) Tipo de lenguajes usados.

La descripción de los seis niveles de razonamiento algebraico en primaria y secundaria (junto con el nivel 0 indicativo de ausencia de algebrización) es la siguiente:

- Nivel 0. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.
- Nivel 1. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de \mathbb{N} y la igualdad como equivalencia.
- Nivel 2. Se usan representaciones simbólico - literales para referir a los objetos intensivos reconocidos, los cuales están ligados a la información espacial, temporal y contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ ($A, B, C \in \mathbb{R}$).
- Nivel 3. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax+B=Cx+D$ ($A, B, C, D \in \mathbb{R}$).
- Nivel 4. Se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes.
- Nivel 5. Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) que implican el uso de uno más parámetros, junto con variables o indeterminadas.
- Nivel 6. Se comienza a estudiar estructuras algebraicas en sí mismas, sus definiciones y propiedades estructurales.

3. METODOLOGÍA DEL TALLER.

Durante el desarrollo del taller se realizarán las siguientes actividades:

1. Presentación de las características del RAE basadas en los trabajos de Godino y colaboradores (Godino, et al., 2014; Godino, et al., 2015) y de los niveles de algebrización.
2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:
 - 2.1. Resolver las tareas del Cuestionario CDM-RAE, a ser posible, de varias maneras.
 - 2.2. Asignar niveles de pensamiento algebraico a las distintas soluciones dadas, en el punto anterior, a las tareas del cuestionario, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.
 - 2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.
3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones

4. REFLEXIONES FINALES.

Consideramos que la distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental puede ser útil en la formación didáctico-matemática de profesores al permitir desarrollar en ellos el sentido algebraico. Se trata de reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales los profesores pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender como la capacidad de un sujeto para,

- 1) Usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.
- 2) Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.
- 3) Reconocer patrones, regularidades y funciones.
- 4) Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los alumnos mediante actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización, la modelización y cálculo analítico. Se contribuye de este modo al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes cuando resuelven un problema de distintas maneras.

Es claro que para que los alumnos vayan construyendo el sentido algebraico los profesores deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y de su progresión en la educación secundaria.

RECONOCIMIENTO.

Taller realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

REFERENCIAS.

CAI, J. & KNUTH, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

CARPENTER, TH. P., LEVI, L., FRANKE, M. L. & ZERINGUE, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM*, 37 (1), 53-59.

CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics*

Teaching and Learning (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

FILLOY, E., ROJANO, T. & PUIG, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Berlin: Springer.

GODINO, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

GODINO, J. D. AKÉ, L., GONZATO, M. y WILHELMI, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.

GODINO, J. D., NETO, T., WILHELMI, M. R., AKÉ, L., ETCHEGARAY, S. Y LASA, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117-142.

GODINO, J. D., WILHELMI, M. R., NETO, T., BLANCO, T. F., CONTRERAS, A., DÍAZ-BATANERO, C., ESTEPA, A. Y LASA, A. (2015). Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros. *Revista de Educación*, 370, 199-228.

KAPUT, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

KIERAN, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

LINS, R. & KAPUT, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. In K. Stacy, H. Chick & M. Kendall (eds.). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, (pp. 47-70). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.