

# APRENDIZAJE DE LOS CUADRILÁTEROS CON NEOTRIE VR COMO RECURSO DE REALIDAD VIRTUAL INMERSIVA

**Carmen-Santos Morales Rodríguez**, *CEIP Andalucía, Santa M<sup>a</sup> del Águila.*

**Isabel M<sup>a</sup> Romero Albaladejo**, *Universidad de Almería.*

**Antonio Codina Sánchez**, *Universidad de Almería.*

## RESUMEN

Presentamos un proyecto de innovación centrado en la creación, puesta en práctica y análisis de una secuencia didáctica para la conceptualización de los cuadriláteros con alumnado de Educación Primaria usando como recurso el software de Realidad Virtual Inmersiva Neotrie VR. Alejado de un enfoque memorístico clásico, presentamos una propuesta para el estudio de los cuadriláteros más cercano a los estilos de aprendizaje y la capacidad lingüística y espacial del propio alumnado, para a través de ellos, ir desarrollando actividades que requieren poner en práctica sus propias habilidades de observación, descripción y clasificación, todo ello en un ambiente de trabajo cooperativo y kinestésico grupal que a su vez fomente el uso espontáneo del lenguaje matemático y el desarrollo de habilidades espaciales.

**Nivel educativo:** Educación Primaria y Secundaria.

## 1. INTRODUCCIÓN

Preocupados por cómo trabajar la geometría y más concretamente, los cuadriláteros durante los tres últimos niveles de la etapa de Educación Primaria, de tal forma que profundicemos en los saberes didácticos, junto con la actual necesidad de acercar a nuestro alumnado la utilización de tecnologías innovadoras como la Realidad Virtual en el aula, nos propusimos utilizar el software Neotrie VR a través de actividades específicamente diseñadas para trabajar conceptos y procesos fundamentales en geometría a los que el alumnado tendría difícil acceso con metodologías y materiales tradicionales.

A este respecto, somos conscientes que aún los docentes se inclinan por hacer hincapié en las definiciones, a pesar de que la legislación incide en el aprendizaje de las propiedades de figuras geométricas a través de la exploración y la elaboración de conjeturas, y de la utilización de materiales manipulables, lúdicos y herramientas digitales. La falta conciencia sobre la importancia de las imágenes a pesar de estar documentado que tienen un mayor impacto en el alumnado produciendo un resultado más permanente e intenso en sus mentes (Can y Yilmaz, 2021), provoca en el profesorado que estos se dejen llevar por propuestas didácticas que no se adaptan a las necesidades del alumnado, con orientaciones metodológicas incompletas, y abordándose casi exclusivamente a

través del aprendizaje memorístico, tanto de nociones básicas, como de exploración mecánica de propiedades de figuras (Romero y Cañadas, 2015), proponiendo actividades y problemas donde los estudiantes son incapaces o no son útiles de aplicar las definiciones para su resolución.

## 2. MARCO TEÓRICO

Para el diseño de las actividades, un marco de referencia que se ha mostrado idóneo y versátil es considerar los niveles y fases de razonamiento geométrico de los Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990), los cuales tienen muy en cuenta y están condicionados por el tipo de conocimiento, vocabulario y forma de razonar que se espera de los estudiantes. En este marco, hay que tener en cuenta que durante la educación primaria obligatoria los estudiantes pueden avanzar del primer nivel, donde reconocen los objetos y conceptos matemáticos basándose en su apariencia física y de una forma global, al nivel análisis en el que comienzan a reconocer las componentes matemáticas que estructuran las figuras, y pueden empezar a establecer relaciones entre los objetos, aún no las establecen entre sus componentes, y de hacerlo, solo de forma experimental. En este avance de nivel es donde situamos nuestra propuesta de intervención para los estudiantes de últimos cursos de primaria.

Por otro lado, hay que tener también en cuenta que en relación a la formación de conceptos, Vinner y Hershkowitz (1983) destacan la relevancia de proveer a los estudiantes de prototipos ricos, con los que enriquecer su imagen conceptual y así, poder alcanzar la comprensión y manejo de los conceptos que se estén trabajando, entendiendo imagen conceptual como la representación operativa del concepto matemático, que no siempre concuerda con la definición del concepto, y que se crea en la memoria tras una vivencia por haber reteniendo una serie de imágenes o interpretaciones visuales.

A este respecto, Alonso y Salar (1992) nos hablan de cómo despertar la capacidad para crear imágenes mediante actividades de imaginación y visión espacial con secciones en formato 2D en las que deben transformar las imágenes dinámicamente, sometiéndolas a control y organizando los resultados, apareciendo contenidos y problemas geométricos de forma contextualizada.

Superando la exploración estática de los cuerpos geométricos, encontramos herramientas al alcance de las aulas como son los softwares que combinan la RVI y la Geometría Dinámica 3D como NeoTrie VR. Al igual que con los SGD 3D, las primeras experiencias con SGD 3D RVI apuntan a que los estudiantes, al poder construir, observar, manipular, e interactuar dinámicamente con objetos 3D virtuales, mejora su motivación y habilidades espaciales para la identificación y comprensión de las principales características de los sólidos geométricos, facilitando el mantenimiento de las estructuras tridimensionales a nivel cognitivo mientras se produce la interacción con el entorno virtual, siendo más significativa en estudiantes con baja capacidad espacial (Hwang y Hu, 2013; Morales, 2019; Rodríguez et al., 2021). Entre las principales razones que explican esta mejora están las relacionadas con el uso de la habilidad cognitiva kinestésica puesto que la interacción se realiza a través de la comunicación de ideas visuales, dinámicas,

verbales o gestuales sin necesidad de utilizar elementos matemáticos más complejos. Neotrie VR potencia en los estudiantes el aprendizaje de la geometría de las transformaciones y el razonamiento espacial (Rodríguez, Romero y Codina, 2021; Codina, García, Romero y Lupiáñez, 2022) favoreciendo los tres procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica: (a) un proceso de visualización, conectado a la representación de objetos y figuras tangibles, y a su transición hacia un estatus de objetos geométricos con los que operar; (b) un proceso de construcción, determinado por los instrumentos, en el que estos pasan de ser artefactos cuyo manejo hay que dominar a herramientas para construir conocimiento; y (c) un proceso discursivo, que incluye argumentaciones y pruebas, en el que se dota a las propiedades geométricas de significado, mediante procesos de validación que pueden ser inductivos o deductivos.

### 3. METODOLOGÍA

La secuencia didáctica que a continuación se expone es fruto de un proceso de investigación que tiene lugar a través de dos ciclos sucesivos de puesta en práctica, análisis y rediseño.

El primer ciclo fue desarrollado como una actividad extraescolar de cinco lecciones distribuidas en diez sesiones para los cursos de 4º, 5º y 6º de primaria de un colegio público de Andalucía, participando 100 estudiantes (27 de 4º, 25 de 5º y 48 de 6º curso), de los que 15 voluntariamente trabajaron en las sesiones con Neotrie VR (2 de 4º, 6 de 5º y 7 de 6º curso) distribuidos en grupos por niveles.

Actualmente, nos encontramos terminando el segundo ciclo, que se ha desarrollado como taller de aula con grupos reducidos, organizado en cinco lecciones distribuidas en diez sesiones para un grupo de 5º, participando voluntariamente 24 estudiantes del mismo colegio.

### 4. ACTIVIDADES

El proyecto aborda los elementos curriculares recogidos en la legislación educativa española del Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Se indica que la competencia matemática y competencia STEM entraña la comprensión del mundo utilizando, entre otros, el pensamiento y representación matemática y la tecnología. A través de la resolución de problemas se ponen en acción ejes del área como la representación de objetos matemáticos y el manejo y la comunicación a través del lenguaje matemático.

Respecto al dominio científico de la geometría, y más concretamente sobre cuadriláteros y figuras tridimensionales, centramos nuestro trabajo en las siguientes competencias específicas y saberes básicos:

- ☐ Competencia específica 1.2.a. Comenzar a elaborar y mostrar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda y elección de estrategias y herramientas, incluidas las tecnológicas, para la resolución de

una situación problematizada medioambiental o social, individualmente y cooperando entre iguales, comenzando a desarrollar una actitud de implicación.

Competencia específica 4.2.a. Comenzar a emplear herramientas tecnológicas adecuadas en la investigación y resolución de problemas.

Competencia específica 6.1.a. Comenzar a interpretar el lenguaje matemático sencillo presente en la vida cotidiana en diferentes formatos, adquiriendo vocabulario apropiado, utilizando este lenguaje para expresar ideas matemáticas, mostrando comprensión del mensaje.

6.2.a. Comenzar a comunicar en diferentes formatos las conjeturas y procesos matemáticos, utilizando lenguaje matemático adecuado, con el propósito de transmitir información matemática.

☐ Saber básico C. Sentido espacial.

MA.03.C.1. Figuras geométricas de dos y tres dimensiones.

MA.03.C.1.2. Técnicas de construcción de figuras geométricas por composición y descomposición, mediante materiales manipulables, instrumentos de dibujo y aplicaciones informáticas.

MA.03.C.1.3. Vocabulario geométrico: descripción verbal de los elementos y las propiedades de figuras geométricas.

MA.03.C.1.4. Propiedades de figuras geométricas: exploración mediante materiales manipulables y lúdicos (cuadrículas, geoplanos, polícubos, magia educativa, etc.) y herramientas digitales (programas de geometría dinámica, realidad aumentada, robótica educativa, etc.).

MA.03.C.4. Visualización, razonamiento y modelización geométrica.

MA.03.C.4.3. Elaboración de conjeturas sobre propiedades geométricas utilizando instrumentos de dibujo (compás y transportador de ángulos) y programas de geometría dinámica.

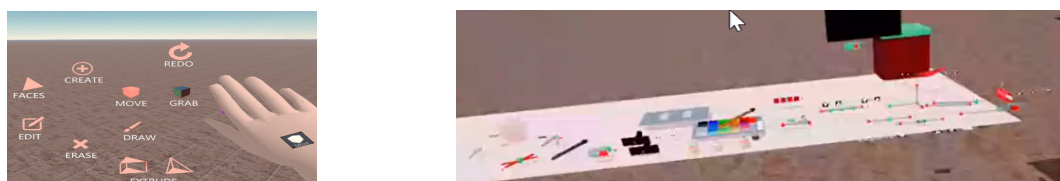
Previo al trabajo con Neotrie VR, se induce la definición de paralelismo, perpendicularidad, cuadrilátero, prisma, paralelogramo y polígono respectivamente. Comienza el/la docente clasificando la primera forma o figura, sin definiciones. Continúa el alumnado observando, justificando y agrupando las siguientes, según las similitudes y diferencias de los elementos presentes en el material manipulable e imágenes que se les presenta cuidando la elección de ejemplos y contraejemplos. Se dirige su atención a través de preguntas para llegar a construir sus propias definiciones.

#### **4.1. ACTIVIDADES CON NEOTRIE VR**

Las lecciones priman la construcción activa de conceptos a través de la observación, el análisis de las situaciones empleando lenguaje geométrico y manipulación. El diseño propuesto solicita argumentar las respuestas y dado que solo un componente del grupo puede llevar las gafas de realidad virtual, induce en los estudiantes a emplear vocabulario geométrico para comunicarse y hacer efectiva la comunicación y el trabajo colaborativo centrándose en el diálogo, la argumentación y la búsqueda del consenso entre compañeros/as durante la

resolución de las situaciones planteadas. A continuación, describimos brevemente las cinco lecciones:

**LECCIÓN 1.** Iniciación a Neotrie VR. Diseñada para conocer el software: cómo moverse, menú del dorso crear paralelas, medir ángulos, distancias ... (Imagen 1).



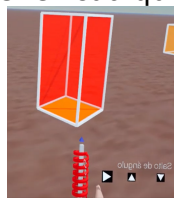
**Imagen 1.** Menú de acciones con manos virtuales y mesa con herramientas.

**LECCIÓN 2.** Paralelismo y perpendicularidad. Se identifican y crean segmentos, planos paralelos y perpendiculares, y se analizan sus posiciones relativas y cómo éstas se modifican al realizar "arrastres" (Imagen 2). Finalmente, se identifican aristas, caras paralelas y perpendiculares del cubo.



**Imagen 2.** Trabajo con las nociones de paralelismo y perpendicularidad en 3D.

**LECCIÓN 3-** Hacia la noción de cuadrilátero. Deben decidir si la figura que se les presenta es o no un prisma. Son figuras que analizan, en una primera parte de forma individual y que sirve para la recogida de información del nivel del que parten, y en una segunda parte lo hacen en equipo consiguiendo la corrección de sus ideas (Imagen 3). La noción de cuadrilátero se aborda a través de la identificación de éstos como parte de figuras 3D, de la observación dirigida para la descripción de las características relevantes, que incluyen los atributos que debe tener cualquier prisma, según su paralelismo y sus bases.



Captura de video de prisma girando sobre sí mismo.

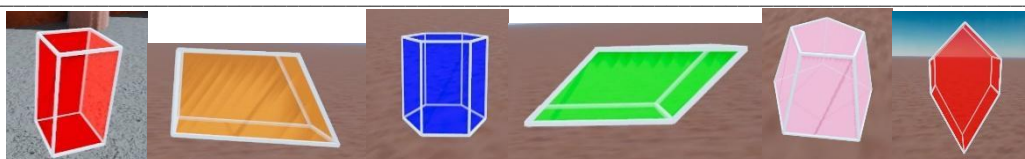
**¿ES UN PRISMA?**

Figura	Sí o no	Por qué
1		

Fragmento de ficha para analizar individualmente.



Analizando figura en grupo.

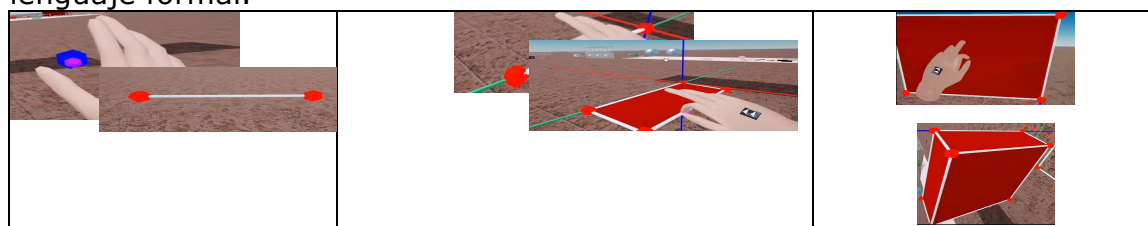


Figuras a analizar.

**Imagen 3.** Recursos para analizar cuerpos geométricos en la lección 3.

En ambas partes de la lección existe una interacción dinámica con las figuras; en la primera parte, las observan de forma estática a través de fotos y de forma dinámica mediante videos que muestran a cada figura rotando sobre sí misma; en la segunda parte, un miembro del equipo interactúa con ellas virtualmente desplazándose alrededor de ellas, moviéndolas o comprobando sus atributos con herramientas como el transportador de ángulos, el metro o la herramienta de paralelas, mientras el resto de equipo observa estas acciones desde el ordenador y dirige al que tiene las gafas de realidad virtual.

LECCIÓN 4. Cambio de dimensiones. Pasamos de 1D a 2D y de 2D a 3D. A través de la extrusión dinámica obtienen un punto, un segmento, de este un paralelogramo y de este un prisma (Imagen 4). El objetivo es reconocer y conceptualizar propiedades inherentes a los cuadriláteros para avanzar en el lenguaje formal.



**Imagen 4.** Extrusión de 1D a 2D y de 2D a 3D.

Al conseguir un paralelogramo, se trabaja la modificación dinámica de 2D a 2D, consiguiendo los diferentes paralelogramos y no paralelogramos (Imagen 5) con el "modo editar" en el eje de coordenadas. Se analizan sus atributos y se comprueba si cumplen con los requisitos esperados.



**Imagen 5.** De 2D a 2D, transformando cuadriláteros.

El siguiente paso es pasar de 2D a 3D a través de la extrusión, buscando semejanzas con modelos dados de paralelepípedos (Imagen 6). Durante los ejercicios deben verbalizar, describir y analizar el proceso y las figuras.



**Imagen 6.** Paso de 2D a 3D, buscando semejanzas con modelos dados.

LECCIÓN 5- Cortes con el plano. Pasamos de 3D a 2D con las secciones. Con la herramienta intersección seccionamos poliedros con un plano para obtener los

diferentes cuadriláteros (Imagen 7). Pueden conseguir todos los cuadriláteros. El objetivo es repasar cuáles son y cómo son.



El docente crea la escena de trabajo distribuyendo cubos y planos.

Los cubos tienen pintura translúcida, que deja ver la intersección que hay dentro de ellos. Con la herramienta se selecciona primero un vértice del cubo. Se obtienen nuevos vértices verdes que sirven de ayuda para visualizar el corte. Metiéndose dentro del cubo se observa el polígono resultante. Hay que indicar al estudiante que se centre en él.

**Imagen 7.** Escena de trabajo y sus elementos.

## 5. ANÁLISIS

Con el análisis del trabajo de la lección 3 se han extraído 5 niveles de logro sobre el dominio de la visualización de los prismas con evidencias del grado de desarrollo del lenguaje geométrico (Imagen 8). A continuación, se exponen los cinco niveles encontrados que se ubican dentro de los niveles de reconocimiento y análisis de los Van Hiele, propio del alumnado de esta edad, 10-11 años.


Nivel 4: Argumentos correctos. Describe las características relevantes, que incluyen los atributos que debe tener cualquier prisma como bases iguales y paralelas, caras laterales con forma de paralelogramo y aristas paralelas.

Nivel 3: Argumentos iniciados. Nombra características relevantes, que incluyen algunos atributos, pero no todos, que debe tener cualquier prisma.

Nivel 2: Argumentos iniciados mal expresados. Nombra alguna característica relevante, con vocabulario confuso usando línea cuando quiere decir arista, rectas/iguales cuando quieren decir que son paralelas.

Nivel 1: Observa características no relevantes (que puede tener otra figura no prisma).

Nivel 0: Argumentos incorrectos.

 <p>Contraejemplo de prisma que analizan en un primer momento de forma individual.</p>	<p>Argumentaciones de nivel 4:                  Estudiante 12. No, porque no tiene las bases iguales.                  Estudiante 20. Aunque tenga 2 bases, no tiene aristas paralelas y las bases no son iguales.</p>
<p>Argumentaciones de nivel 3:                  Estudiante 5. No, porque no tiene 2 bases iguales y las líneas se chocan en algún punto.                  Estudiante 17. Las bases no son iguales y las aristas no son paralelas.</p>	
<p>Argumentaciones de nivel 2:                  Estudiante 6. No tiene las caras iguales y las líneas no son paralelas.</p>	

Estudiante 8. No tiene líneas paralelas ni caras rectas.  
 Estudiante 11. Parece que es prisma, pero está cortada. Es una pirámide.  
 Estudiante 16. Las líneas se chocarían.

Argumentaciones de nivel 1:  
 Estudiante 7. No, porque no tiene sus caras iguales.

Argumentaciones de nivel 0:  
 Estudiante 1. No, porque tiene 2 bases y las caras planas.  
 Estudiante 3. No, porque no tiene 6 caras.  
 Estudiante 10. Sí, tiene todos sus lados iguales.  
 Estudiante 14. No, tiene 2 bases y líneas paralelas.

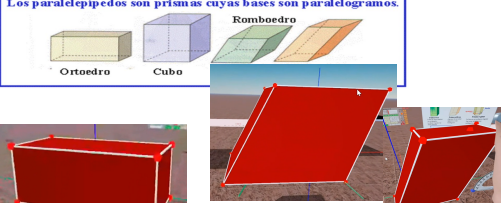
**Imagen 8.** Argumentos dados por el alumnado para justificar que no es un prisma.

El trabajo de descripción y análisis cooperativo de los ejemplos y contraejemplos ofrecidos permite enriquecer sus imágenes conceptuales al tener que reconocer, de forma guiada por la docente y los compañeros/as, las características relevantes de los atributos del prisma descartando las ideas no relevantes, viéndose con necesidad de ampliar su vocabulario para poder comunicar sus ideas y generalizando éstas para analizar otras figuras. Para reforzar los avances en el lenguaje surge la necesidad de hacer esquemas visuales de las argumentaciones que van haciendo.

De forma transversal a cualquier lección se trabaja la perspectiva, aspecto que aumenta el nivel de dificultad de resolución de los planteados. En el espacio virtual, la apariencia es engañosa. Las imágenes parecen deformadas dependiendo de la posición del observador que tiene las gafas y obliga ser consciente de ello y a comprobar las afirmaciones mediante el cambio de posición del objeto o del sujeto.

Con la modificación dinámica de dimensiones, pasando de 1D a 2D, de 2D a 2D y de 2D a 3D, trabajada en la lección 4 se avanza en el dominio de la perspectiva y en el perfeccionamiento de sus imágenes mentales. Con estos ejercicios, de mayor complejidad que los anteriores, empiezan a establecer relaciones entre los cuadriláteros y los prismas, y de forma experimental entre sus componentes (Imagen 9).

Los paralelepípedos son prismas cuyas bases son paralelogramos.



Ortoedro    Cubo    Rombaedro

Hoja de modelos de paralelepípedos dados junto a los paralelepípedos creados en NeoTrie VR.

COMPLETA LA TABLA CON LAS FIGURAS QUE VAIS A CREAR A TRAVÉS DE LA EXTRUSIÓN

NOMBRE DE LA FIGURA CREADA	Nº DE CARAS LATERALES Y DE BASES	FORMA DE CARAS LATERALES Y DE BASES
ortopedro	Caras laterales 4 Bases 2	Rectángulo cuadrado
Rombociedro	Caras laterales 4 Bases 2	Rombociedro
Rombaedro	4 caras laterales 2 bases	Rombociedro

**Imagen 9.** Buscando semejanzas entre paralelepípedos creados y modelos.

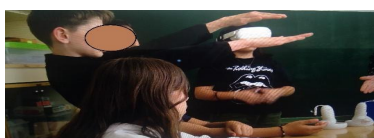
Una vez extruidos los paralelogramos buscan semejanzas con los paralelepípedos dados. Durante los ejercicios deben verbalizar, describir y



analizar el proceso y las figuras siguiendo un orden de pasos de ejecución: conjetura cómo se podrá hacer, discute con tus compañeros/as y haz para confirmar las conjeturas, encaminándose de la fase manipulativa a la analítica.

La lección 5 permite adaptarla a diferentes niveles de dificultad, eligiendo un poliedro u otro. A continuación, se describen brevemente los pasos para su realización junto con ejemplos de errores que se pueden encontrar (Imagen 10).

1. ¿Qué cuadrilátero quieres obtener? Con esta pregunta facilitamos el nivel de dificultad haciendo que elija un cuadrilátero del que tiene una imagen mental. Se debe debatir cómo van a seccionar el cubo. Se indica que observen y expliquen la posición del plano respecto a las caras del cubo ya que esta orientación también facilita la resolución.

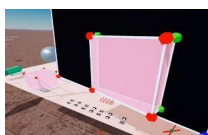


Indican, erróneamente, que para obtener un rectángulo con el corte del plano tienen que posicionarlo de forma paralela a la base del cubo.

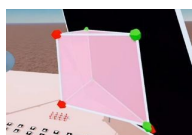


Comparan la inclinación del plano para obtener un trapecio o un rectángulo.

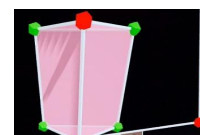
2. A continuación, seccionan hasta conseguirlo. Dirigen al compañero/a que maneja NeoTrie para que se posicione en una situación en la que puedan observar bien y le indican cómo seccionar con el plano.



Cuadrado



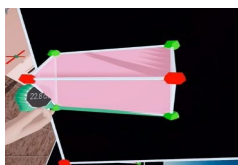
Rectángulo



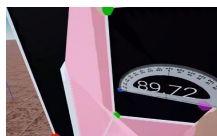
Trapecio

Ejemplos de cuadriláteros obtenidos de forma sencilla.

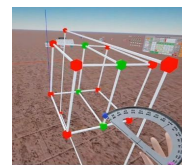
3. Cuando consiguen el polígono se les pregunta por qué lo saben.



Comprobando, con el metro, si sus lados son iguales.



Comprobando, con el transportador, si sus ángulos miden lo mismo.



Comprobando, con el transportador, si sus ángulos miden lo mismo (con las caras eliminadas para facilitar la medición).

4. Repetir el problema con otros poliedros como el prisma pentagonal, prisma octogonal, prisma irregular o prisma cóncavo, teniendo en cuenta que el trabajo con el cubo es de nivel más avanzado.

**Imagen 10.** Pasos en el proceso de resolución del problema.

Las situaciones abiertas, como la lección 5, en las que no hay una única respuesta, son ocasiones muy favorables para informarnos del nivel de profundidad al que cada estudiante es capaz de llegar (Alonso y Salar, 1992).

### Trabajo apoyado por:

Financiado por los proyectos Cod. PIV-055/21, Consejería de Educación, y UAL2020-SEJ-B2086, FEDER-Junta de Andalucía.

## 6. REFERENCIAS

- ALONSO, P. y SALAR, A. (1992). *Visión espacial: cortando un cubo*. Barcelona: Graó.
- CAN, Y., y YILMAZ, S. (2021). *An investigation of the concept images on the plane in three dimensional Euclidean space*. International Journal of New Trends in Arts, Sports&ScienceEducation,10(5),326-341. <http://www.ijtase.net/index.php/ijtase/article/view/42>
- CODINA, A., GARCÍA, M.M., ROMERO, I.M., Y LUPIÁÑEZ, J.L. (2022). *Poliedros con el software de realidad virtual inmersiva Neotrie VR, una experiencia con maestros en formación*. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, vol. 25, núm. 3, pp. 1/14. DOI: <https://doi.org/10.6018/reifop.531841>
- GUTIÉRREZ, Á., y JAIME, A. (2012). *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria*. Tecné, Episteme y Didaxis, 32, 55-70. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859>
- HWANG, W., y HU, S. (2013). *Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem*. Computers&Education,62,308-319. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.005>
- Morales, C.S. (2019). *Metacognición en un ambiente de realidad virtual. Geometría con NeoTrie VR*. Master's Thesis, University of Almería, Almería, Spain. Available online: <http://hdl.handle.net/10835/8075> (accessed on 30 July 2021).
- RODRÍGUEZ, J.L., ROMERO, I.M. Y CODINA, A. (2021). «The Influence of NeoTrie VR's Immersive Virtual Reality on the Teaching and Learning of Geometry». Mathematics, núm. 9, artículo 2411. Doi: <https://doi.org/10.3390/math9192411>
- ROMERO, I. M. Y CAÑADAS, M. C. (2015). Enseñanza y aprendizaje de la geometría. P. Flores e L. Rico (Coords.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria (253/279). Madrid. Pirámide.
- VINNER, S. y HERSHKOWITZ, R. (1983). *The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts*. En R. Hershkowitz (Ed.) Proceedings of the 7th PME conference (pp. 223-228). The Weizmann Institute of Science.