MEX, UNA HERRAMIENTA TECNOLÓGICA PARA POTENCIAR EL SENTIDO ESTRUCTURAL

Gloria Cancec Murillo, *Universidad de Granada, España*

Teresa Rojano Ceballos, *CINVESTAV, México*

Valentina Muñoz Porras, *CIMAT, México*

Ana B. Montoro Medina, *Universidad de Granada, España*

Pablo Flores Martínez, *Universidad de Granada, España*

RESUMEN

Ante las dificultades presentadas por los alumnos en la manipulación algebraica, en el CINVESTAV de México han creado un entorno web, Máquina de Expresiones MEx, para potenciar el sentido estructural. Se entiende el Sentido Estructural como la capacidad de apreciar e interiorizar las estructuras de los objetos algebraicos. Para ello, se realizan acercamientos didácticos que ayudan al reconocimiento y aplicación de dichas estructuras en la resolución de diferentes tareas. En este trabajo se describen las características de este ambiente web, incluyendo ejemplos de tareas que ilustran los requerimientos de sentido de la estructura algebraica para resolverlas.

Nivel educativo: Secundaria y Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN

Durante el aprendizaje del álgebra es habitual encontrar en las resoluciones de estudiantes expresiones como $(a+3)^2 = a^2 + 9$ o $a^2 - 16 = (a-4)^2$. Como aparece en la Figura 1, en la primera fracción algebraica el estudiante confunde la diferencia de cuadrados con el cuadrado de un binomio. En la segunda fracción no solo no identifica la diferencia de cuadrados como la suma por diferencia, sino que además simplifica términos en una resta. Por último, en la tercera, si bien reconoce la diferencia de cuadrados como suma por diferencia, considera que la resta es conmutativa, por lo que omite el signo menos. Además, simplifica incorrectamente.

$$\frac{x^2-25}{x^2-3x-10}=\frac{\cancel{(x-5)^2}}{\cancel{(x-5)}(x+2)}=\frac{x-5}{x+2}$$

$$\frac{\cancel{x^2}-4}{\cancel{x^2}-5x+6}=\frac{-4}{-5x+6}$$

$$\frac{1-x}{x^2-1}=\frac{\cancel{1-x}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=x+1$$

Figura 1. Ejemplos de errores típicos en álgebra

Para comprender estos y otros errores habituales durante el aprendizaje de álgebra, se han realizado numerosas investigaciones (Aké y Larios, 2020; Bolaños y Lupiáñez, 2021; García-Suárez y Bolaños, 2022). Por ejemplo, encontramos trabajos que analizan los errores a la hora de factorizar con productos notables (Vega-Castro et al., 2010) o reducción de expresiones (García-Suarez et al., 2011).

Según Vega-Castro et al. (2012), el trabajo de los estudiantes con expresiones algebraicas suele ser mecánico, sin analizar el significado de las expresiones, y más bien implementando técnicas algebraicas memorísticas. En su opinión, es necesario mejorar el sentido estructural de los estudiantes.

El término sentido estructural fue inicialmente utilizado por Linchevski y Livneh (1999) para referirse, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permiten al alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas.

Para promover el desarrollo del Sentido Estructural, entendido como la capacidad de internalizar las estructuras de los objetos algebraicos (Rojano, 2022), un grupo de investigadores mexicanos ha diseñado una serie de tareas que se incorporan en un ambiente web llamado Máquina de Expresiones (MEx) (Muñoz-Porras, 2015). En esta comunicación se presenta dicho ambiente. El sentido estructural se puede adquirir en diferente grado, por lo que previamente se describirán los niveles de sentido estructural declarados por Hoch y Dreyfus (2004), utilizados como marco para el diseño de tareas, lo que permite comprender mejor a qué nos referimos con sentido estructural.

2. SENTIDO ESTRUCTURAL

Es evidente que las expresiones algebraicas obedecen a diferentes estructuras, que Hoch y Dreyfus (2004) señalan como origen para reconocer distintas partes de las expresiones algebraicas, las cuales se conectan o relacionan entre sí.

Entre todos los ejemplos de estructura de expresiones algebraicas se destacan los productos notables, las fracciones algebraicas, las ecuaciones y las funciones. Según Vega Castro et al. (2013), podemos encontrar expresiones algebraicas que tienen la misma estructura externa (apariencia de la expresión) o interna (vínculo entre las cantidades y las operaciones). Por ejemplo, dadas las expresiones

a) $(x+3)^2$; b) x^2+9+6x; c) $(3x+6)^2$; d) $x^2+9x-3x+10-1$; vemos que a) y c) tienen la misma estructura externa, visualmente corresponde a un cuadrado de binomio, pero su estructura interna es distinta, pues los elementos que lo componen son diferentes. Por el contrario, a), b) y d) tienen la misma estructura interna, ya que corresponden a la misma expresión, pero su estructura externa es diferente y hay que realizar transformaciones algebraicas para ir de una a otra.

Usualmente, en álgebra necesitamos obtener expresiones equivalentes (misma estructura interna), para lo cual es especialmente útil reconocer estructuras algebraicas conocidas, como los productos notables (misma estructura externa).

A continuación, se describen los niveles de sentido estructural (SS) propuestos por Hoch y Dreyfus (2006), utilizando el producto notable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ como ejemplo.

En concreto, se aprecian tres niveles, según lo que alcanzan a realizar los estudiantes:

SS1) Reconocen una estructura familiar en su forma más simple. Por ejemplo, el alumno de este nivel visualiza la expresión $81-x^2$ como una diferencia de cuadrados y es capaz de factorizar en una suma por diferencia, identificando correctamente los factores, es decir $(9+x)(9-x)$.

SS2) Tratan un término compuesto como una sola entidad y reconocen una estructura familiar en una forma más compleja (suma o producto). Por ejemplo, en la expresión $(x-3)^4-(x+3)^4$, el estudiante visualiza los términos $(x-3)$ y $(x+3)$ como una sola identidad, siendo capaz de identificar la diferencia de cuadrados. En este caso, $((x-3)^2+(x+3)^2)((x-3)^2-(x+3)^2)$.

SS3) Eligen las manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura. Por ejemplo, al factorizar $24x^6y^4-150z^8$, se extrae factor común $6(4x^6y^4-25z^8)$, se reconoce la diferencia de cuadrados como suma por diferencia y se consideran $2x^3y^2$ y $5z^4$ como dos identidades
$6(2x^3y^2+5z^4)(2x^3y^2-5z^4)$.

3. TAREAS EN MEx

MEx es una aplicación de entorno virtual que propone tareas de diferente nivel de complejidad, las cuales potencian el Sentido Estructural de los estudiantes. Su interface es muy intuitiva, empleando en su diseño la idea de una máquina.

Dados unos elementos (input), la máquina los transforma siguiendo una expresión algebraica (proceso) para generar un elemento diferente (output).

Como puede verse en la figura 2, las tareas solicitan estudiante:

- Obtener la expresión de salida, conocidas las expresiones de entrada y generadora.
- Prever la expresión de entrada, a partir de las expresiones de salida y generadora.
- Intuir la expresión generadora, cuando la máquina da las expresiones de entrada y salida.

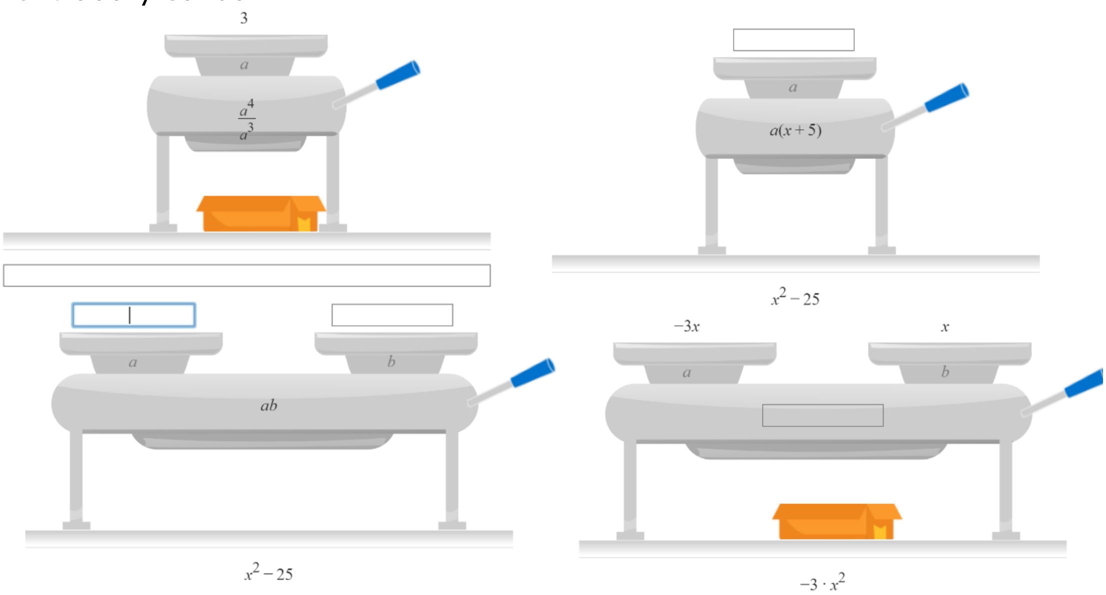

Figura 2. Tareas MEx

Estas tareas están clasificadas según su complejidad (básico, medio y alto), el cual va acorde al contenido matemático que aborda, agregando elementos de sustitución, es decir considerando los términos como entidades simples a compuestos (Hoch, 2004) y de saliencia visual (Kirschner, 2004).

Los contenidos trabajados en los distintos niveles están basados en el currículum del álgebra escolar de México, aunque son aspectos que se trabajan también en España. Las tareas del nivel básico son operaciones con números naturales y fracciones, es decir, no hay expresiones algebraicas en el input u output.

En el nivel medio encontramos aplicaciones de reglas básicas del álgebra escolar como reducciones, productos notables, factorizaciones y potencias. Si nos fijamos en los ejemplos 2 y 3 de la figura 2, se trabaja la factorización de la expresión x^2-25, si bien en el ejemplo 2 se proporciona uno de los factores. En ambos se espera es que se apliquen los productos notables para evidenciar sentido de la estructura.

Por último, en el nivel alto, se combinan más de una regla algebraica. Como se muestra en la figura 3, en ambos ejemplos sus términos a o b son compuestos. En el primero, uno de sus términos es una potencia y a su vez se pide desarrollar

el cuadrado de binomio. En el segundo ejemplo se pide ingresar los términos compuestos de tal forma que al multiplicar se obtenga el resultado indicado por la
máquina y la estructura externa de la expresión de salida es una suma de términos, mientras que la expresión generadora, tiene una estructura externa de producto. Por lo que el usuario debería lograr encontrar la estructura interna. Pero una posible factorización de $xy + 7(x + y) + 49$ no es inmediata, sino hasta quitar el paréntesis y factorizar x en los dos primeros términos y 7 en los últimos dos términos $xy + 7(x + y) + 49 = xy + 7x + 7y + 49 = x(y + 7) + 7(y + 7)$. En esa última equivalencia, se puede observar el factor común y+7 para lograr una estructura de producto $(x + 7)(y + 7)$ por lo que una posible solución sería introducir $x + 7$ y $(y + 7)$ en cada uno de los platos respectivamente.

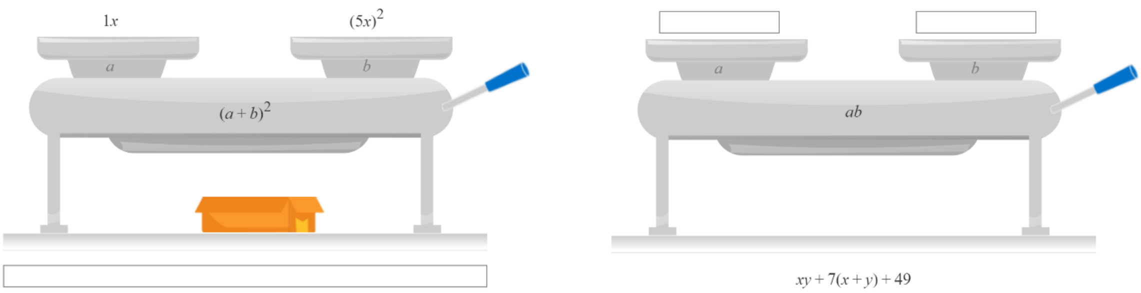

Figura 3. Expresiones algebraicas

Muñoz-Porras y Xolocotzin (2022) explica la idea de saliencia visual mediante los ejemplos que aparecen en la figura 4, señalando que el uso de paréntesis u otros marcadores pueden facilitar el reconocimiento de estructuras. Por ejemplo, en la figura 4 aparecen cuatro tareas cuyo output tiene la misma estructura interna, es decir, son expresiones equivalentes a $4(x^2 + 1)$. En todas ellas se proporciona la función generadora, que resulta ser el producto de dos expresiones. Al igual que ocurría en los ejemplos comentados anteriormente, en los dos primeros casos se conoce uno de los factores: $x^2 + 1$. Por lo tanto, lo que se solicita es que se ingrese la o las expresiones (Input) que arroje la expresión de salida al aplicar la función generadora den como resultado output señalado. Como se puede observar, la diferencia entre c) y d) y entre e) y f) es la presencia o ausencia de paréntesis, que puede facilitar o dificultar que el estudiante visualice la estructura $x^2 + 1$.

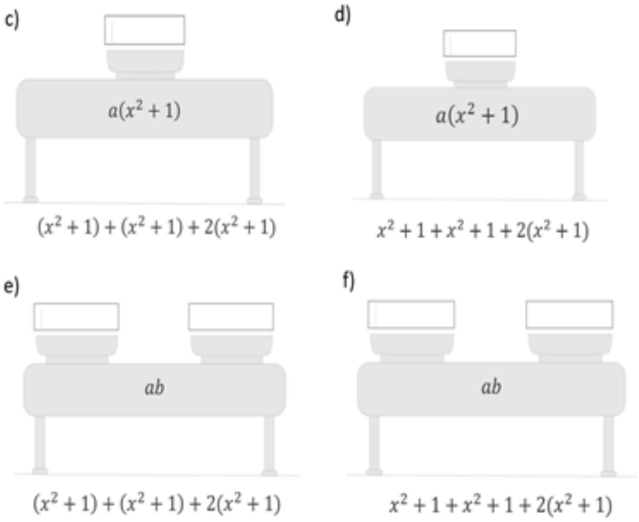

Figura 4. Ejemplos Saliencia Visual

4. ENTORNO MEX PARA APRECIAR DESARROLLO DE SENTIDO ESTRUCTURAL

En el entorno web de MEx, el estudiante puede comenzar con cualquiera de los bloques definidos, pero una vez realizado un intento, el programa selecciona la siguiente tarea teniendo en cuenta su respuesta. Concretamente, si es correcta, propone otra tarea de un nivel más elevado, agregando nuevos elementos. Sin embargo, si tras dos intentos, se equivoca, proporciona la respuesta correcta y sugiere la realización de otra tarea del mismo tipo.

Además, el programa permite visualizar los avances que va teniendo un estudiante en particular, indicando el número de intentos, los temas desarrollados, y/o el tiempo que emplea en cada ejercicio (figura 5).

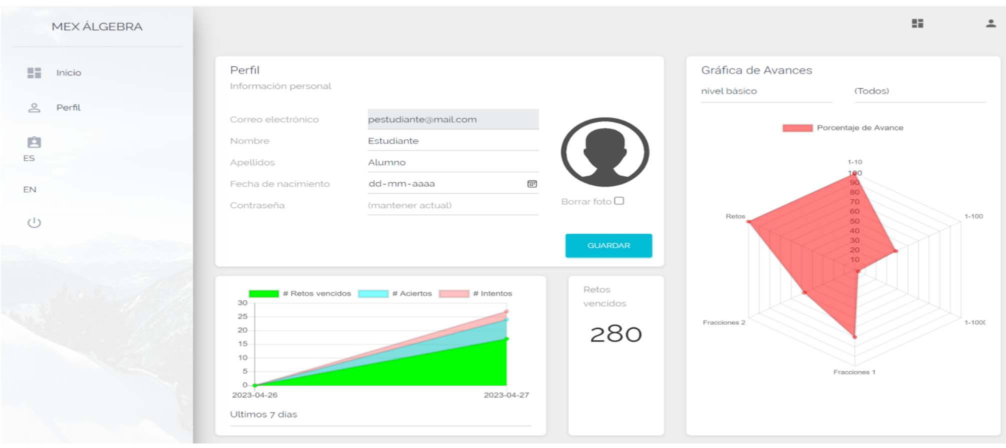

Figura 5. Avance usuario

5. REFLEXIONES

Utilizar los niveles de sentido estructural de Hoch para categorizar el desempeño de estudiantes favorece el identificar las dificultades de manipulación que poseen.

El sistema de retroalimentación de MEx es acorde al nivel de competencia algebraica del usuario y fomenta el desarrollo de competencias algebraicas superiores en grupos heterogéneos de estudiantes, por medio del uso de un sistema adaptativo que promueve el aprendizaje autónomo.

En Rojano (2022) se concluye que, si bien los usuarios hacen recorridos por todos los niveles, la parte menos explorada son los retos, pues se agregan otros elementos como entidades compuestas. También señalan que, si bien al principio los usuarios tendían al desarrollo, no obstante, al tener más de un intento se deducía sin necesidad de utilizar procedimientos. Por último, en el nivel alto, los usuarios mostraron tener mayor dificultad para dar su respuesta, por lo que acudieron a la saliencia visual para reconocer la estructura.

Actualmente, MEx se está utilizando a grupos heterogéneos como estudiantes de bachillerato, estudiantes de pedagogía en matemática, Profesores de primaria y secundaria y estudiantes de ingeniería, cuyos resultados se están procesando.

Queda como desafío crear una nueva funcionalidad que le permita al profesor tener acceso a los avances de sus estudiantes. También, se deja abierta la posibilidad de que con el uso de MEx se puedan categorizar los tipos de desempeño de los estudiantes, identificando el nivel de sentido estructural que estos alcanzan. Por último, como futuro proyecto, el grupo de investigación está elaborando ejercicios de racionalización para posteriormente ampliar MEx a tópicos de cálculo como límites.

6. REFERENCIAS

AKÉ, L. y LARIOS, V. (2020). *Competencia algebraica de profesores de matemáticas*. Educacão Matemática Pesquisa, 22(1), 512-531.

BOLAÑOS, H. y LUPIÁÑEZ, J. (2021). *Errores en la comprensión del significado de las letras en tareas algebraicas en estudiantado universitario*. Uniciencia 35(1), 1-18.

GARCÍA-SUÁREZ, J., SEGOVIA, I. y LUPIÁÑEZ, J. (2011). *Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011 (pp. 145-155). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

GARCÍA-SUÁREZ, J. y BOLAÑOS, H. (2022). *Errores algebraicos en las producciones de estudiantes universitarios de Costa Rica y México*. Matemáticas, Educación y Sociedad, 5(2), 31-45.

HOCH, M. y DREYFUS, T. (2004). *Structure sense in high school algebra: The effect of brackets*. Proceedings of the 28th PME Conference, (Vol. 3, pp 49-56).

HOCH, M., y DREYFUS, T. (2006). *Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result*. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: PME.

KIRSHNER, D. y AWTRY, T. (2004). *Visual salience of algebraic transformations*. Journal for Research in Mathematics Education, 35(4), 224-257.

LINCHEVSKI, L. y LIVNEH D. (1999). *Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts*. Educational Studies in Mathematics, 40(2), 173-196.

MUÑOZ-PORRAS, V. (2015). *Herramienta ad hoc para el Sentido de la Estructura en Álgebra*. Tesis Doctoral Departamento de Matemática Educativa, Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

MUÑOZ-PORRAS, V. y XOLOCOTZIN, U. (2022). *Developing Structure Sense with Digital Technologies: Introducing the MEx Platform*. En T. Rojano (Ed.). Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners (pp. 67-87). Routledge.

ROJANO, T. (2022). *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners*. Routledge.

VEGA-CASTRO, D., CASTRO, E., y MOLINA, M. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Comunicación presentada en Seminario del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico en el XIV simposio de la SEIEM (7-10 septiembre 2010). Lérida.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2012). *Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables*. Relime 15(2), 232-258.

VEGA-CASTRO, D. (2013). *Perfiles de alumnos de Educación Secundaria relacionados con el Sentido Estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas*. Tesis Doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España.