

USO DE ÁLGEBRA TILES PARA MEJORAR LA INICIACIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

José Antonio Núñez López, *Universidad de Castilla-La Mancha*

José Luis González Fernández, *Universidad de Castilla-La Mancha*

David Molina García, *Universidad de Castilla-La Mancha*

RESUMEN

Algebra tiles es un material didáctico manipulativo para iniciar a los alumnos y alumnas de primeros cursos de Educación Secundaria en el lenguaje algebraico. En esta comunicación se hace una descripción de dicho material y se muestran los resultados de una investigación realizada en dos grupos del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Ambos tuvieron el mismo profesor, que usó la metodología clásica en uno de ellos (grupo de control) y una metodología basada en Algebra tiles en el otro (grupo experimental). Los resultados obtenidos revelan que el uso de los Algebra tiles mejora significativamente la capacidad del alumnado para entender el lenguaje algebraico en sus primeras expresiones, uno de los grandes desafíos de los últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria.

Nivel educativo: Primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas, principalmente en niños, niñas y jóvenes, suele presentar dificultades provocadas por su formalidad y abstracción intrínseca (Castro, 2012). Por ello, el uso de materiales manipulativos para mejorar su comprensión ha sido uno de los pilares fundamentales en los que se han apoyado docentes y divulgadores a lo largo del tiempo (Cascallana, 1988; Álvarez, 1996; Alsina i Pastells, 2004, 2006; Meavilla y Oller, 2013). De hecho, está demostrado que el uso de este tipo de materiales favorece tanto la motivación como el concepto de los alumnos tienen de las matemáticas (Arrieta, 1998; García-Moya et al., 2019).

El álgebra es una de las ramas de las matemáticas en la que más dificultades suelen encontrarse (Castro, 2012). Su aprendizaje se lleva a cabo de manera continua durante todo el desarrollo de los discentes: en Educación Infantil se ha propuesto en los últimos años el denominado álgebra temprana (Alsina y Giralt, 2017; Alsina, 2019), en el que se utilizan principalmente juegos, canciones o situaciones de la vida cotidiana que permiten a los y la estudiantes ir desarrollando el razonamiento lógico-matemático y, con ello, iniciarse en álgebra. Más adelante, durante la Educación Primaria (6-12 años) se trabaja de

manera significativa este álgebra temprana por medio de la aritmética y sus axiomas (Carragher y Schliemann, 2007; Bautista-Pérez et al., 2021), las relaciones entre cantidades y el uso de los primeros símbolos matemáticos para representar operaciones (Molina, 2005; Godino et al., 2012).

En los primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) se da un gran salto cualitativo en los contenidos algebraicos impartidos (Godino et al., 2012; 2012a). Concretamente, la primera transición de la aritmética al álgebra formal, mediante el uso de las primeras incógnitas en el cálculo, es uno de los puntos clave en estos niveles. De hecho, diversos estudios anteriores han evidenciado las dificultades que los alumnos y alumnas de Educación Secundaria encuentran en este tránsito (Kieran, 1992; 2007; Lacasta et al., 2006; Filloy et al., 2008).

Para la enseñanza del álgebra es muy habitual recurrir a métodos instructivos basados en la memorización, lo que suele traducirse en un aprendizaje insatisfactorio y retención limitada de los conocimientos (Garzón y Bautista, 2018). Por otro lado, para mejorar las capacidades algebraicas de los alumnos, en la literatura se han propuesto otras metodologías centradas en el desarrollo temprano del pensamiento funcional y en la práctica representacional (Brizuela y Blanton, 2014), en el trabajo cooperativo (Bouzas, 2011) o en la generalización visual mediante sucesiones de figuras (Valenzuela y Gutiérrez, 2018).

Contrariamente a lo que pueda pensarse, actualmente existen pocos materiales manipulativos para trabajar el álgebra, a pesar de los conocidos beneficios que producen en el aprendizaje y en la comprensión de otras ramas de las matemáticas (Moyer, 2001; Carbonneau et al., 2013). Entre ellos, destacan los Algebra tiles, diseñados para mejorar la comprensión de los conceptos algebraicos usando figuras geométricas (Kablan, 2016) y usados previamente para trabajar conceptos algebraicos (Agrawal y Morin, 2016). Sin embargo, su eficacia a la hora de iniciarse en el lenguaje algebraico y en cómo pueden favorecer su comprensión en estas primeras fases no ha sido investigado.

El objetivo de esta comunicación es mostrar los beneficios que dicho material produce en alumnos y alumnas de 12-13 años en su primer contacto con el lenguaje algebraico, utilizando la metodología CRA (concreto-representacional-abstracto) (Witzel et al., 2008) y un proceso de instrucción. Para ello, se exponen los resultados de una intervención realizada en dos grupos de alumnos del primer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Además, se presenta el material fabricado y los instrumentos de medida y métodos estadísticos utilizados.

2. MATERIAL Y MÉTODO

2.1. PARTICIPANTES

En este estudio participaron 30 alumnos y alumnas de dos grupos de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria de un centro público de Manzanares (Ciudad Real). Ambos grupos tuvieron el mismo profesor, que usó la metodología clásica en uno de ellos (grupo de control) y una metodología basada en Algebra tiles en el otro (grupo experimental). El grupo de control contaba con 17 alumnos y alumnas, pero 2 de ellos eran absentistas, por lo que únicamente 15

estudiantes (10 chicos y 5 chicas) fueron incluidos en el estudio. El grupo experimental estaba formado por 19 alumnos y alumnas, 2 de los cuales eran absentistas y otros 2 recibían apoyo de pedagogía terapéutica. Por ello, 15 estudiantes (10 chicos y 5 chicas) fueron también incluidos en el estudio.

2.2. ALGEBRA TILES

Los Algebra tiles son un material manipulativo diseñado para mejorar la comprensión de los conceptos algebraicos. Se usan para numerosos fines: simular expresiones algebraicas sumativas o multiplicativas, factorizar polinomios, etc. Son fáciles de adquirir e incluso pueden fabricarse utilizando plantillas. Básicamente, consisten en un conjunto de cuadrados y rectángulos cuyas áreas representan los diferentes monomios algebraicos (Garzón y Bautista, 2018).

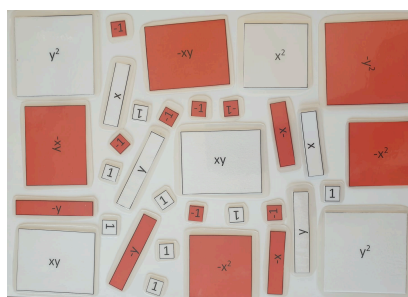


Figura 1. Piezas de Algebra tiles construidas y usadas para este estudio.

Están formados por piezas que representan términos en la expresión algebraica de grado 0 (cuadrados de área 1×1), grado 1 (rectángulos de diferentes áreas dependiendo de la incógnita) y grado 2 (cuadrados y rectángulos de diferentes áreas dependiendo de las incógnitas) (Reinschlüssel et al., 2018). En el material fabricado para este estudio, las piezas blancas representan términos positivos y las rojas corresponden a los términos negativos.

Usando los Algebra tiles, representar una expresión algebraica es tan sencillo como agrupar las piezas correspondientes hasta obtenerla. Por otro lado, para representar una ecuación, únicamente se ha de dividir el espacio de trabajo en dos (uno para cada uno de los miembros de la ecuación) e ir colocando las piezas necesarias hasta representar la misma expresión que indique.

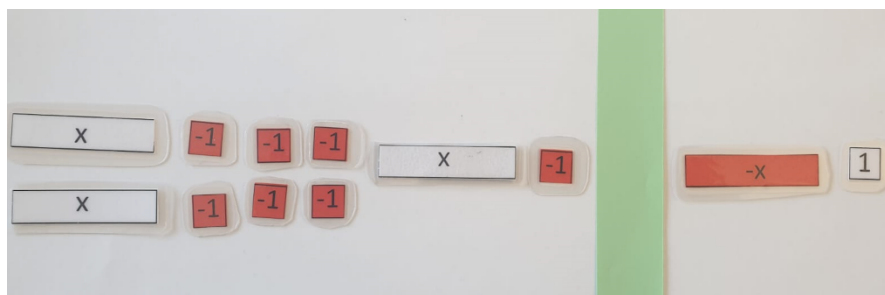


Figura 2. Representación de la ecuación $2(x-3)+x-1=-x+1$

Para este estudio se fabricaron 16 juegos, formado cada uno por 56 piezas, con un total de 896.

Cabe destacar que los juegos fueron entregados a los participantes al inicio de la intervención, por lo que disponían de ellos tanto en el aula como fuera de ella. Esto ha permitido que los alumnos y alumnas hayan podido utilizarlos en todo momento.

2.3. METODOLOGÍA

La intervención se realizó al inicio de la tercera evaluación durante 16 sesiones, a lo largo de las cuales se realizaron diversas pruebas usadas como instrumentos de medida de la eficacia de dicha intervención:

- La primera sesión estuvo dedicada a una prueba preliminar.
- En la sesión número 7 se llevó a cabo una prueba, dedicada a comprobar la adquisición de los contenidos en un punto intermedio de la intervención.
- En la sesión número 15 se realizó la prueba final de la intervención.

Los Algebra tiles fueron utilizados de manera ininterrumpida durante las 7 primeras sesiones. En adelante, los contenidos impartidos incluían, por ejemplo, ecuaciones con denominadores, donde el material Algebra tiles pierde eficacia, al no poder representar las ecuaciones de manera natural y ágil. Llegados a punto, el profesor decidió unificar las metodologías y poder así observar las influencias de las metodologías iniciales y si los Algebra tiles continuaban siendo usados por los alumnos del grupo experimental.

2.4. MÉTODOS ESTADÍSTICOS UTILIZADOS

Los datos han sido analizados con el programa informático Statistical Package for Social Sciences (SPSS, v.25). Para los análisis estadísticos intragrupo se ha usado la prueba de los rangos de Wilcoxon (Wilcoxon, 1945). Por otro lado, para las comparaciones intergrupo se ha usado la prueba U de Mann-Whitney (1947).

También, se han medido correlaciones entre los resultados de los alumnos en los diferentes instrumentos de medida implementados. Para ello, se usó el coeficiente de correlación de Spearman (1904) y se calcularon estadísticos como la media, la desviación típica, la mediana o el coeficiente de variación.

Además, se han estudiado los resultados obtenidos por ambos grupos en las pruebas intermedia y final para cada tipo de actividad algebraica. De esta forma, se podrán analizar las principales dificultades encontradas en ambos y así poder establecer las posibles influencias de los Algebra tiles y la metodología seguida en la intervención. Para hacerlo, se midió el porcentaje de acierto en cada una de las actividades del siguiente modo: si es correcta, se considera un 100% de acierto.

3. RESULTADOS

3.1. COMPARACIÓN INTERGRUPAL

Se comprobó que ambos grupos tenían un nivel matemático similar al iniciar la intervención. Dado que se llevó a cabo al inicio de la tercera evaluación, se compararon las calificaciones obtenidas por los alumnos en las dos primeras

evaluaciones por medio del test de Mann-Whitney. Los resultados no mostraron diferencias significativas, ni en la primera ($p=0.783$) ni en la segunda ($p=0.546$).

Para evaluar el conocimiento algebraico inicial, se realizó el mismo test sobre los resultados de la prueba preliminar. El resultado no significativo de esta prueba ($p=0.882$) muestra un nivel algebraico inicial equivalente en ambos grupos.

Sin embargo, en la prueba intermedia, las diferencias en la adquisición del álgebra fueron significativas ($p=0.007$), siendo la diferencia de medias la más grande de todos los instrumentos de medida (4.22 en el grupo de control por 6.04 en el grupo experimental). Estas diferencias se mantuvieron hasta la prueba final donde, a pesar de no llegar a ser estadísticamente significativas ($p=0.083$), sí fueron muy sustanciales. De hecho, en este caso, la media en el grupo de control fue de 5.90, mientras que llegó a 7.21 en el grupo experimental.

Las Tablas 1 y 2 muestran, para el grupo de control y el grupo experimental, los estadísticos calculados en cada uno de los instrumentos de medida usados.

Estadístico	Primera evaluación	Segunda evaluación	Prueba preliminar	Prueba intermedia	Prueba final
Media	5,92	6,75	6,09	4,22	5,90
Desv. Típica	1,99	1,11	1,83	1,80	2,31
Máximo	9,75	9,13	8,57	8,75	9,00
Mínimo	2,83	5,33	1,43	1,50	2,40
Mediana	5,49	6,75	5,71	4,00	5,55
Coef. variación	33,67%	16,48%	29,98%	42,63%	39,08%

Tabla 1. Estadísticos del grupo de control (sobre un máximo de 10).

Estadístico	Primera evaluación	Segunda evaluación	Prueba preliminar	Prueba intermedia	Prueba final
Media	5,69	7,19	6,47	6,04	7,21
Desv. Típica	1,76	1,53	1,78	1,86	1,80
Máximo	9,79	9,40	10,00	9,00	9,85
Mínimo	3,09	4,65	4,29	3,50	4,50
Mediana	5,98	7,50	5,71	5,90	6,90
Coef. variación	30,86%	21,35%	27,48%	30,83%	24,92%

Tabla 2. Estadísticos del grupo experimental (sobre un máximo de 10).

No se observaron correlaciones fuertes entre ningún instrumento de medida utilizados. Destaca una correlación de 0.68 entre los resultados de la segunda evaluación y la prueba preliminar, explicables debido a la poca separación temporal entre ambas. En la Figura 3 se ven los resultados de las correlaciones de Spearman para cada uno de los pares de instrumentos de medida analizados.

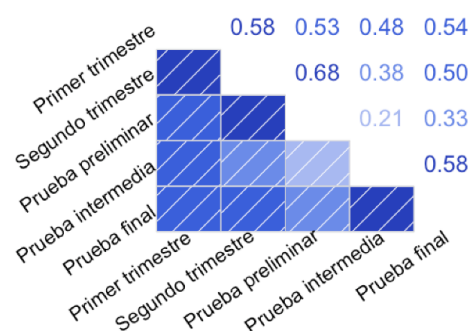


Figura 3. Correlaciones de Spearman entre los diferentes instrumentos de medida¹.

¹ El triángulo superior derecho muestra los coeficientes de correlación exactos, mientras que el triángulo inferior izquierdo muestra el correspondiente mapa de colores.

3.2. COMPARACIÓN INTRAGRUPPO

En el grupo de control, el test de Wilcoxon no mostró diferencias significativas entre los resultados obtenidos en la prueba preliminar y la prueba final ($p=0.627$). Sin embargo, los resultados de ambas fueron significativamente mejores que los de la prueba intermedia ($p=0.007$ y $p=0.005$ respectivamente). En la Tabla 1 puede verse cómo la media de la prueba intermedia (4.22) es inferior a la de la prueba preliminar (6.09) y a la de la prueba final (5.90).

Por otro lado, en el grupo experimental, el test de Wilcoxon mostró diferencias significativas entre la prueba intermedia y la prueba final ($p=0.005$), siendo superiores los resultados de esta última (medias de 6.04 por 7.21). La prueba preliminar no mostró diferencias significativas con la prueba intermedia ($p=0.389$) ni con la prueba final ($p=0.169$).

3.3. ERRORES PRINCIPALES

En la prueba intermedia, se observó que los porcentajes de acierto de cada una de las actividades fue superior en el grupo experimental: describir situaciones de forma algebraica (71.56% por 61.11%), valor numérico (60% por 57.78%), operaciones con monomios (48% por 10.83%), despejar la incógnita (82% por 81.67%), trasposición de términos (68.33% por 40.83%) y uso correcto de paréntesis (45.83% por 29.17%). De forma global, el grupo experimental obtuvo un 62.62% de acierto, mientras que el grupo de control alcanzó el 46.90%.

En la prueba final, el grupo experimental volvió a mostrar valores superiores: describir situaciones de forma algebraica (51% por 55%), valor numérico (68.87% por 81.67%), operaciones con monomios (69.33% por 36.33%), despejar la incógnita (85.67% por 87.33%), trasposición de términos (91% por 69%) y uso correcto de paréntesis (71.56% por 58.89%), expresiones con denominadores (66.67% por 59.56%) y problemas algebraicos (74% por 41.67%). Globalmente, el grupo experimental obtuvo un 72.26% de acierto, mientras que el grupo de control alcanzó el 61.18%. Destacar el incremento del porcentaje de aciertos medio global entre ambas pruebas, tanto en el grupo experimental (de 62.62% a 72.26%) como en el grupo de control (de 46.90% a 61.18%).

La Tabla 3 muestra los porcentajes de acierto de cada actividad en ambas pruebas.

Actividad	Prueba intermedia		Prueba final	
	Grupo experimental	Grupo de control	Grupo experimental	Grupo de control
Describe situaciones	71.56%	61.11%	51.00%	55.00%
Valor numérico	60.00%	57.78%	68.87%	81.67%
Operaciones con monomios	48.00%	10.83%	69.33%	36.33%
Despejar la incógnita	82.00%	81.67%	85.67%	87.33%
Trasposición de términos	68.33%	40.83%	91.00%	69.00%
Uso de paréntesis	45.83%	29.17%	71.56%	58.89%
Expresiones denominadores	-	-	66.67%	59.56%
Problemas algebraicos	-	-	74.00%	41.67%
MEDIAS TOTALES:	62.62%	46.90%	72.26%	61.18%

Tabla 3. Porcentajes de acierto de ambos grupos en cada actividad algebraica.

4. DISCUSIÓN E IMPLICACIONES EN EL AULA

Los Algebra tiles son uno de los pocos materiales manipulativos que trabajan de forma específica el álgebra en sus primeras expresiones, a pesar de los conocidos beneficios que este tipo de materiales tienen para el aprendizaje de las matemáticas (Carbonneau et al., 2013). Además, el paso de la aritmética al álgebra constituye un cambio radical para la mayoría de los alumnos (Caglayan et al., 2013). De hecho, dadas las dificultades que conlleva, ya se ha propuesto que la enseñanza del álgebra sea trabajada en cursos previos a través de patrones, relaciones, representaciones de situaciones y estructuras algebraicas (González, 2019; NCTM, 2000).

A pesar de que la investigación con Algebra tiles es limitada, estudios previos han mostrado sus beneficios en varios colectivos. Concretamente, Garzón y Bautista (2018) observaron una mejora en el desempeño del álgebra trabajando con Algebra tiles virtuales en 40 estudiantes de ingeniería. Long et al. (2020) probaron su eficacia en estudiantes con trastornos intelectuales y del desarrollo. También, Reinschlüssel et al. (2018) desarrollaron una interfaz de usuario personalizada para el trabajo con Algebra tiles, obteniendo resultados muy positivos de su uso. Por último, Leitze y Kitt (2000) lo aplicaron tanto a estudiantes de escuela elemental, secundaria y a presidiarios internos que estaban estudiando para obtener el graduado escolar.

Los datos obtenidos en las diferentes pruebas muestran mejores resultados del grupo experimental en la comprensión y realización de operaciones algebraicas. Las diferencias, obtenidas en la mitad de la intervención, fueron estadísticamente significativas. Además, revelaron cómo los alumnos y alumnas que seguían la metodología estándar tenían grandes dificultades para realizar operaciones con monomios, entre otras. Los resultados obtenidos por el grupo experimental fueron superiores en todas las actividades planteadas.

A partir de este momento, debido a los contenidos a impartir y su posible conflicto con los Algebra tiles, el profesor decidió unificar las metodologías. Se pudo observar cómo la mayoría de los componentes del grupo experimental los siguieron usando como apoyo, en un proceso que terminó con la retirada natural de los mismos. Los resultados de la prueba final mostraron que más de la mitad de los alumnos y alumnas del grupo de control seguían teniendo dificultades en las operaciones con monomios o en la resolución de problemas algebraicos. Sin embargo, el grupo de estudiantes que había seguido la metodología basada en Algebra tiles volvió a mostrar resultados claramente superiores.

El estudio ha sido diseñado para evitar factores externos, siendo el profesor el mismo en ambos grupos. Por otro lado, los grupos tenían un nivel matemático similar al comenzar la intervención y las actividades fueron las mismas en ambos.

En cuanto a las limitaciones, destacamos que la muestra sobre la que se ha realizado es limitada, contando únicamente con 30 alumnos y alumnas. Sin embargo, los resultados obtenidos son claros y se espera poder ampliar el estudio en años próximos. También es importante comentar que el estudio fue realizado en plena pandemia COVID-19, lo que pudo influir tanto de manera positiva, al tenerse grupos reducidos de estudiantes, como de manera negativa,

al no poder estos relacionarse con naturalidad y poder explorar los diferentes materiales y conocimientos de forma grupal.

Como conclusión, remarcar que los resultados obtenidos son coherentes, robustos y en línea con investigaciones previas, es decir, el uso de Algebra tiles para la enseñanza del álgebra constituye un gran beneficio para los alumnos y alumnas de primeros cursos de Educación Secundaria, permitiendo comprender la abstracción matemática de un modo más natural.

REFERENCIAS

Agrawal, J., y Morin, L. (2016). *Evidence-based practices: Applications of concrete representational abstract framework across math concepts for students with mathematics disabilities*, Learning Disabilities Research and Practice, 31(1), 34-44.

Alsina i Pastells, Á. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos: para niños de 6 a 12 años*, Narcea, Madrid.

Alsina i Pastells, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0-6 años*, Octaedro, Barcelona.

Alsina, Á. y Giralt, I. (2017). *Introducción al álgebra en Educación Infantil: un itinerario didáctico para la enseñanza de los patrones*, Revista de Didácticas Específicas, 16, 113-129.

Alsina, Á. (2019). *Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil*, Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8(1), 1-19.

Álvarez, Á. (1996). *Actividades matemáticas con materiales didácticos: más de 250 problemas con fichas, dominó, palillos, tramas, geoplanos, policubos, tangram, pentominós, libros de espejos, tabla de multiplicar y papiroflexia*, Ministerio de Educación y Ciencia.

Arrieta, M. (1998). *Medios materiales en la enseñanza de la matemática*, Revista de Psicodidáctica, 5, 107-114.

Bautista-Pérez, J. L., Bustamante-Rosario, M. H. y De Armas, T. A. (2021). *Desarrollo de razonamiento algebraico elemental a través de patrones y secuencias numéricas y geométricas*, Educación Matemática, 33(1), 125-152.

Bouzas, P. (2011). *Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo?*, Investigación en la escuela, 73, 95-108.

Brizuela, B. M., y Blanton, M. (2014). *El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria*, Revista de Psicología, 14, 37-57.

Caglayan, G., Olive, J., y Izsák, A. (2013). *How middle school students understand polynomial sums and products using algebra tiles model in a "course dialogue"*, *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 33(3), 267–306.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). *Early algebra and algebraic reasoning*. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Reston, Virginia.

Carbonneau, K., Marley, S., y Selig, J. (2013). *A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives*, *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380–400.

Cascallana, M.T. (1988). *Iniciación a la Matemática. Materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

Castro, E. (2012). *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (75-94).

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*, Springer, New York.

García-Moya, M.; Blanco, R. y Fernández-César, R. (2019). *Matemáticas manipulativas y alto rendimiento*. *Inclusión, Tecnología y Sociedad: investigación e innovación en educación*. 2264-2277, Dykinson.

Garzón, J., y Bautista, J. (2018). *Virtual Algebra Tiles: A pedagogical tool to teach and learn algebra through geometry*, *Journal of Computer Assisted Learning*, 34, 876-883.

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. (2012). *Niveles de razonamiento algebraico elemental*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (285-294).

Godino, J. D., Castro, W. F., Ake, L. P. y Wilhelmi, M. R. (2012a). *Naturaleza del razonamiento algebraico elemental*, *Bolema*, 26 (42b), 483-512.

González, R. (2019). *Evaluación de estrategias formativas para mejorar las actitudes hacia las matemáticas en secundaria*, *Educación Matemática*, 31(1), 176-203.

Kablan, Z. (2016). *The effect of manipulatives on mathematics achievement across different learning styles*, *Educational Psychology*, 36(2), 277–296.

Kieran, K. (2007). *Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation*. En, F. Lester

(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762), Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra*. In: GROUWS, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (390-419), Macmillan, New York.

Lacasta, E., Madoz, E. G. y Wilhelmi, M. R. (2006). *El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria*, *Indivisa*, 4, 79-90.

Leitze, A., y Kitt, N. (2000). *Using Homemade Algebra Tiles to Develop Algebra and Prealgebra Concepts*, *Mathematics Teacher: Learning and Teaching*, PK-12, 93, 462.

Long, H., Bouck, E. y Domka, A. (2020). *Manipulating Algebra: Comparing Concrete and Virtual Algebra Tiles for Students with Intellectual and Developmental Disabilities*, *Exceptionality*, 1, 1-18.

Mann, H. y Whitney, D. (1947). *On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other*, *Annals of Mathematical Statistics*, 18, 50-60.

Meavilla, V. y Oller, A. M. (2013). *Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos*, *Números*, 82, 89-100.

Molina, M. (2005). *La integración del pensamiento algebraico en educación primaria*, *Investigación en educación matemática*, 7, 53-70.

Moyer, P. S. (2001). *Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics*, *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175-197.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reinschlüssel, A., Alexandrovsky, D., Döring, T., Kraft, A., Braukmüller, M., Janßen, T., Reid, D., Vallejo, E., Bikner-Ahsbahs, A. y Malaka, R. (2018). *Multimodal Algebra Learning: From Math Manipulatives to Tangible User Interfaces*, *i-com*, 17(3), 201-209.

Spearman, C. (1904). *The Proof and Measurement of Association between Two Things*, *American Journal of Psychology*, 15, 72-101.

Valenzuela, J., y Gutiérrez, V. E. (2018). *Desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de bachillerato a través de la generalización visual de sucesiones de figuras*, *Educación Matemática*, 30(2), 49-52.

Wilcoxon, F. (1945) *Individual Comparisons by Ranking Methods*, *Biometrics*, 1, 80-83.

Witzel, B. S., Riccomini, P. J., y Schneider, E. (2008). *Implementing CRA With Secondary Students with Learning Disabilities in Mathematics*, *Intervention in School and Clinic*, 43(5), 270–276.