LÍMITES Y CON-TIC-NUIDAD

Álvaro Vielba Iglesias
Mª Rosario Fátima Zamora Pérez.

RESUMEN

La lógica de esta propuesta se basa en la evolución hacia un sistema capaz de encauzar a los estudiantes hacia las trayectorias más adecuadas a sus capacidades, que estimulen el espíritu emprendedor. Es preciso propiciar el oportuno cambio metodológico, de forma que el alumnado sea un elemento activo en el proceso de aprendizaje.

El trabajo que se presenta comienza con el desarrollo teórico que fundamenta cualquier proyecto de innovación educativa, muestra algunas de las numerosas propuestas existentes y culmina con una relación de actividades de aula y su implementación práctica, que fundamentan la propuesta de mejora en algunas situaciones didácticas de análisis matemático.

Nivel educativo: Primero de Bachiller

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en didáctica de las matemáticas han tenido un progreso substancial, debido, entre otros factores, al análisis de la respuesta a preguntas del tipo:

¿Cómo organizar la secuencia de actividades para favorecer el aprendizaje de los conocimientos matemáticos? [6]

¿El funcionamiento del pensamiento matemático, es independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación semióticos utilizados?

En diferentes trabajos de investigación se observa que la adquisición del conocimiento matemático no introduce a la mayoría de los estudiantes en las formas del pensamiento matemático, como por ejemplo en la habilidad para cambiar el registro de representación. [6]

Coincidimos con la idea de Fernández [9] de que la meta final de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles, en este momento, de la Educación Secundaria, ha de ser que el alumno adquiera desenvoltura en la interpretación y escritura del lenguaje simbólico, así como el empleo del lenguaje gráfico, interpretando por tal la expresión mediante tablas, esquemas gráficos, etc., que sea capaz de verbalizar lo así tratado y su traducción al lenguaje simbólico.

La reflexión sobre la evolución de la enseñanza de las matemáticas desde la educación secundaria hasta la universidad conlleva la necesidad de investigar lo que la didáctica de las matemáticas está aportando en esta línea. Urge la cuestión: "¿Los didactas de las matemáticas son primero matemáticos o didactas?

La producción de cada nuevo conocimiento matemático, su aprendizaje y su enseñanza pone de relieve procesos específicos únicos. Sucede lo mismo con la percepción de los mecanismos que intervienen en una actividad matemática original y necesita investigaciones en que las matemáticas juegan un papel relevante, no sólo como objeto sino también como instrumento de estudio.” [5]

La didáctica de las matemáticas estudia una serie de problemas que se plantean con relación a una teoría o a un concepto. Es preciso tener en cuenta la manera en que se enseña, las dificultades que plantea la asimilación del tema de estudio y el interés que presenta el alumno en el aprendizaje de las matemáticas. Así, la didáctica de la matemática tiene como objetivo la mejora de la práctica docente y en ella deben validarse las investigaciones y sus resultados.

Puntualizando lo expresado establecemos algunos dominios propios de la competencia del didacta de la matemática:

i. Analizar cómo los alumnos adaptan los conocimientos matemáticos y la utilización que hacen de ellos.

ii. Proponer un mundo de situaciones, de problemas y de ejercicios en el que estos conocimientos encuentran su función y su significado.

Ya en Godino (1996) se propone desarrollar materiales y recursos para mejorar la instrucción matemática usando los conocimientos en tecnología. “*El conocimiento científico teórico condiciona el conocimiento tecnológico y el práctico, esto es, desempeña un papel dominante y de control*” (p. 135).

Con frecuencia la manera de enseñar matemáticas es determinante en la respuesta del alumno; si se enseña dando una importancia fundamental a la memorización de conceptos y técnicas, sin profundizar en que entienda las estructuras que justifican estas reglas, se presenta una imagen de las matemáticas como una materia en la que lo fundamental es el uso de procedimientos algorítmicos realizados mecánicamente.

Como consecuencia de esta visión de la materia de matemáticas, el alumno deduce, entre otras suposiciones, que:

- Todos los problemas deben tener una respuesta correcta y un método determinado de resolución.
- Si no se responde empleando el procedimiento más directo es señal de inferioridad.
- Resolver ejercicios mediante el método de ensayo-error, no es adecuado.
- Comprender las matemáticas sólo está al alcance de las mentes brillantes, y además las matemáticas no tienen por qué tener sentido. [6]

Otro factor que incide en los resultados del aprendizaje es el juicio que, a priori, tiene el alumno ante la materia. Si se siente incapaz de afrontar el reto, cualquier dificultad le lleva a aumentar su ansiedad, no realiza práctica porque se siente incapaz de salvar cualquier dificultad que se le plantee, no pregunta porque teme ser etiquetado de forma negativa. Esta actitud defensiva es útil en un primer momento, pero muy pronto le impide alcanzar un aprendizaje significativo.

Las TIC brindan condiciones tecnológicas para la transformación de la enseñanza en un proceso educativo más personalizado, centrado en un aprendizaje significativo. [16]

La utilización de la tecnología ayuda a **visualizar conjeturas**, **buscar soluciones**, **explorar hipótesis**, permite mejorar el aprendizaje complementada con los medios educativos tradicionales.

Este medio de enseñanza potencia situaciones de enseñanza y aprendizaje motivadoras, de una forma lúdica-recreativa ya que su uso de manera científica favorece el desarrollo de la individualidad de los estudiantes. El uso de la tecnología provocará cambios en el conocimiento didáctico del contenido y en el conocimiento matemático. [16]

2. CONCEP-IMAGE

El concepto de imagen se compone de toda la estructura cognitiva en la mente del individuo que está asociada con un concepto dado.

Tall y Vinner [17] utilizan las siguientes definiciones:

Concept definition: son las palabras que se emplean para definir formalmente un concepto.

Concept image: son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto.

Estas definiciones van asociadas a las dificultades que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, (en este trabajo) asociado a conceptos de análisis matemático: límite y continuidad de una función.

Un rasgo distintivo de la matemática en un nivel de bachillerato es la complejidad de los contenidos (en realidad en todos los niveles, pues cuando el nivel es más bajo también es menor la edad del alumno). El éxito en matemáticas se puede relacionar con la riqueza y la flexibilidad de las representaciones mentales de los conceptos matemáticos. [2]

Todo tipo de representaciones: numéricas (usando software que escriba tabla de valores, hojas de cálculo), simbólicas (como los símbolos de función, de límite) y visuales (Gráficos, por ejemplo Geogebra permite desplazar la imagen en la pantalla y acercar o alejar el objeto de estudio para visualizar detalles), muestran el funcionamiento como proceso y como concepto.

El concepto de aproximación local es un "concepto dinámico", en el sentido de que requiere la noción de límite y, por tanto, es abstracto en sí mismo, no visualizable [1]

El uso de la calculadora mediante el manejo de tablas de valores permite al alumno tener una visión más completa de este concepto y distinguir entre límite de una función y continuidad, es decir, le da las pautas presentes en el caso de que una función no esté definida en un determinado punto o intervalo.

Tesis doctorales como las de Blázquez (1999) y de Gatica (2007) y los artículos posteriores derivados de las mismas y divulgados en diversas publicaciones hacen un estudio exhaustivo del concepto de límite, introduciéndole de una forma novedosa, mediante una definición rigurosa pero exenta del formalismo de la notación métrica o topológica. Explican, para ello, la diferencia entre los conceptos de aproximación y tendencia, para lo que utilizan los cuatro registros: verbal, gráfico, simbólico y numérico; y recomiendan trabajar las conversiones entre ellos [4].

2.1. COMPETENCIAS CLAVE DE BACHILLERATO

Entre las competencias clave, LOMLOE, según el artículo 16 del Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, está la Competencia Matemática, en ciencia, Tecnología e ingeniería (STEM)

STEM1. Selecciona y utiliza métodos inductivos y deductivos propios del razonamiento matemático.

STEM2. Utiliza el pensamiento científico para entender y explicar fenómenos relacionados con la modalidad elegida, planteándose hipótesis y contrastándolas o comprobándolas mediante la observación, la experimentación y la investigación, utilizando herramientas e instrumentos adecuados, apreciando la importancia de la precisión y la veracidad y mostrando una actitud crítica acerca del alcance y limitaciones de los métodos empleados.

STEM4. Interpreta y transmite los elementos más relevantes de investigaciones de forma clara y precisa, en diferentes formatos (gráficos, tablas, diagramas, fórmulas, esquemas, símbolos.) y aprovechando la cultura digital.

2.2. CONTENIDOS PRIMER CURSO DE BACHILLERATO EN CASTILLA Y LEÓN

Cambio.

- Límites: estimación y cálculo a partir de una tabla, un gráfico o una expresión algebraica.
- Continuidad de funciones: aplicación de límites en el estudio de la continuidad.

Relaciones y funciones.

- Análisis, representación gráfica e interpretación de relaciones mediante herramientas tecnológicas.
- Propiedades de las distintas clases de funciones, incluyendo, polinómicas, exponenciales, racionales sencillas, irracionales sencillas, logarítmicas, trigonométricas y a trozos: comprensión y comparación.

3. LÍMITES Y CONTINUIDAD. PROPUESTA DE TRABAJO

Se proponen tareas que discriminen las características de la función, los alumnos emplean distintos lenguajes: gráfico, utilizando Geogebra visualizan las características de la función, con la vista algebraica el lenguaje simbólico y con la calculadora las aproximaciones numéricas.

En Geogebra <u>no se visualiza una discontinuidad evitable</u> pues el "tamaño" de un punto no permite notar separación ni es comparable al "circulito" que dibujamos en una representación manual. La frialdad de una calculadora que hace eso: cálculos; permite al alumno validar dicha afirmación con un "ERROR" que le "arroja" la misma, en los casos de que la discontinuidad sea evitable.

Previamente se enseñan los comandos y la forma de escribir las instrucciones, por otra parte, la herramienta informática va "interactuando" con el estudiante en el supuesto de que la sentencia no esté bien introducida. El contenido de este apartado abarca los siguientes temas: funciones, límites y continuidad.

La práctica de los ejercicios conlleva el tránsito entre los diferentes registros de representación pues, como se ha expuesto anteriormente, los cambios de un registro a otro enriquecen las imágenes conceptuales que un individuo tiene sobre un determinado concepto.

[1]Las definiciones teóricas son el punto de partida de esta práctica. En la relación de ejercicios que suelen aportar los libros de texto, las tareas son repetitivas y no presentan las diferentes casuísticas que aportamos en esta propuesta.

3.1. Idea Intuitiva De Límite Finito En Un Punto Finito

1.- *Calcula el límite de la función* $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ *en* $x=1$.

2.- *Calcula el límite de la función* $g(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$ *en* $x=0$

En bachillerato, en el sistema verbal, el concepto de límite de una función en un punto se representa como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto.

(x^3-1)/(x-1)			sen(x)/x	
1	1		0	
2	1,9	6,51	0,9	0,870363233
3	0,19	1,2261	-0,81	0,894181697
4	1,729	5,718441	0,729	0,913750518
5	0,3439	1,46216721	-0,6561	0,929783916
6	1,59049	5,12014844	0,59049	0,942891695
7	0,468559	1,688106536	-0,531441	0,953588679
8	1,4782969	4,663658625	0,4782969	0,962305768
9	0,56953279	1,893900389	-0,43046721	0,969401211
10	1,38742049	4,312356102	0,38742049	0,975171295
11	0,65132156	2,075541334	-0,34867844	0,979860042
12	1,3138106	4,039908878	0,3138106	0,983667777
13	0,71757046	2,232477834	-0,28242954	0,986758515
14	1,25418658	3,827170567	0,25418658	0,989266265
15	0,77123208	2,36603099	-0,22876792	0,991300335
16	1,20589113	3,660064555	0,20589113	0,992949767
17	0,81469798	2,478430782	-0,18530202	0,994287011
18	1,16677182	3,52812829	0,16677182	0,995370969
19	0,84990536	2,572244494	-0,15009464	0,996249494
20	1,13508517	3,423503519	0,13508517	0,99696144
………	………	………	………	………
90	1,00008464	3,000253932	8,4641E-05	0,999999999
91	0,99992382	2,999771474	-7,6177E-05	0,999999999
92	1,00006856	3,000205684	6,856E-05	0,999999999
93	0,9999383	2,999814893	-6,1704E-05	0,999999999
94	1,00005553	3,000166603	5,5533E-05	0,999999999
95	0,99995002	2,999850063	-4,998E-05	1
96	1,00004498	3,000134948	4,4982E-05	1
97	0,99995952	2,99987855	-4,0484E-05	1
98	1,00003644	3,000109307	3,6435E-05	1
99	0,99996721	2,999901626	-3,2792E-05	1
100	1,00002951	3,000088539	2,9513E-05	1

Ilustración 1. Elaboración propia

Aun cuando estas tablas nos proporcionan una gran riqueza de datos y la visión de la aproximación por la derecha y por la izquierda al valor requerido,

[1] Las definiciones y teoremas del libro de texto, se usan como base y se incide en la necesidad de que utilicen un manual de referencia.

tanto en la variable x como en la variable y; la forma en la que se programa para su obtención no es fácil de asimilar por la mayoría de los alumnos, así que se pasa a utilizar la tabla con una calculadora, pues, aunque a priori, no tenga la posibilidad de calcular tantos datos, estos se pueden introducir posteriormente y su manejo es elemental.

En matemáticas los objetos de conocimiento no son accesibles a través de experiencias sensoriales, como puede ser en otras materias de conocimiento como la física; para acceder a ellos es preciso trabajar a partir de representaciones semióticas.

3.2. Límite Finito En Un Punto Finito. Continuidad

En los ejercicios que se presentan, a continuación, se trabaja simultáneamente el límite en un punto finito y la continuidad.

Estos, así como otros de ampliación, se pueden visualizar en el siguiente libro de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/f4acennk

3.- *Estudia si la función*:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8 & si \quad x < 1 \\ -3 - 3x & si \quad 1 < x < 3 \\ 7 + x & si \quad x > 3 \end{cases}$$ *es continua, y dibuja un esquema gráfico de la misma. Clasifica sus discontinuidades.*

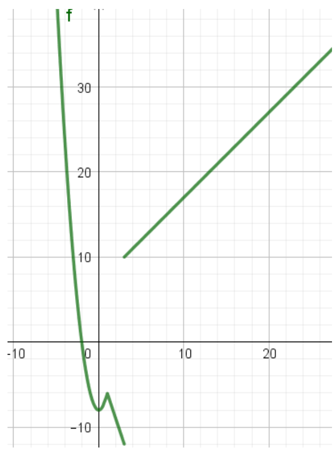

Ilustración 2. Elaboración propia

Como se observa la función no está definida ni en $x = 1$ ni en $x = 3$.

Son funciones elementales que se pueden esbozar manualmente a priori, y posteriormente con el programa informático. Presenta dos tipos de discontinuidad y la representación con Geogebra no ayuda a visualizar la discontinuidad evitable.

En Ortega (2022) [13] se describen ampliamente errores didácticos asociados al uso tecnológico incorrecto.

Contenido didáctico: La continuidad en un punto implica la necesidad de que la función esté definida en dicho punto.

Este tipo de funciones polinómicas pueden ser representadas sin necesidad de Geogebra, mediante un esquema, y la relación puede ser ampliada trivialmente; por lo que pasamos a estudiar otro tipo de funciones en las que la informática es necesaria y multiplica las soluciones del problema.

4.- *Calcula los valores de a y b para que la función*

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & si \quad 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & x \ge \pi \end{cases}$$, *sea continua en todo R.*

En el estudio de esta función aparecen parámetros. Lo primero que se observa es que la función está definida en todos los números reales pues, de lo contrario, la respuesta es inmediata: No puede ser continua en R.

En esta situación de aprendizaje el alumno comprende que las letras no juegan el mismo papel que los números, pues directamente el programa "no reconoce" la expresión. Concepto para visualizar: Diferencia entre variable y parámetro.

La función será continua dependiendo de los valores que se den a esos parámetros. En este caso, la solución es $a = 1$ y $b = -2$, por lo que se "invita" al alumno a que utilicen los deslizadores para observar en qué valores la función es continua. A posteriori, se resuelven las ecuaciones que se deducen del cálculo de los límites laterales.

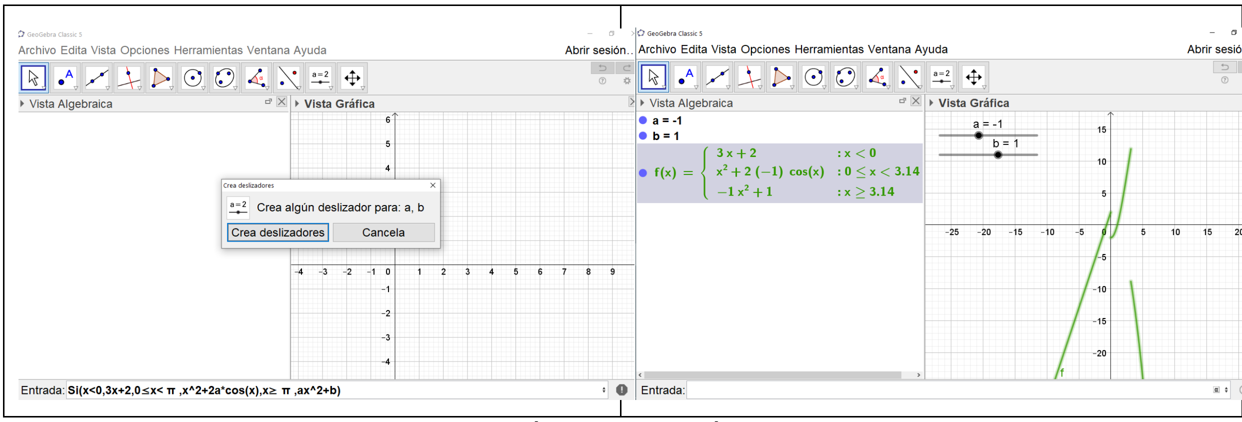

Ilustración 3. Elaboración propia

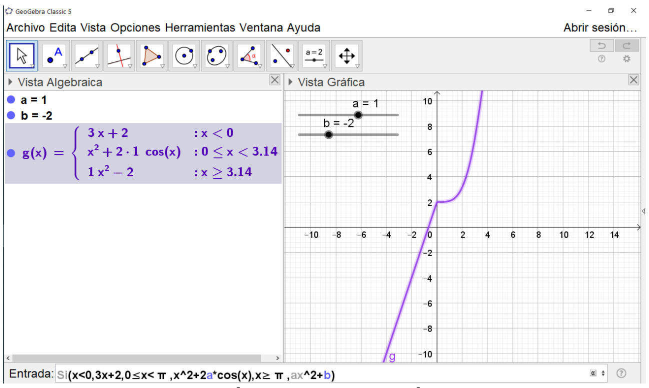

Ilustración 4. Elaboración propia

5.- *Determine los valores de a y b para que la función que aparece a continuación sea continua en R.*

$$f(x) = \begin{cases} 1/e^{x} & si \quad x < 0 \\ a\cos(x) + b & si \quad 0 < x < \pi \\ sen(x) - a\,x & si \quad \pi < x \end{cases}$$

En el estudio de esta función aparecen parámetros. Lo primero que se observa es que la función no está definida en todos los números reales; la respuesta es inmediata: **No puede ser continua en R**.

6.- *Determine los valores de* a *y* b *para que la función que aparece a continuación sea continua en R.*

$$g(x) = \begin{cases} 1/e^{x} & si \quad x \le 0 \\ a\cos(x) + b & si \quad 0 < x \le \pi \\ sen(x) - a\,x & si \quad \pi < x \end{cases}$$

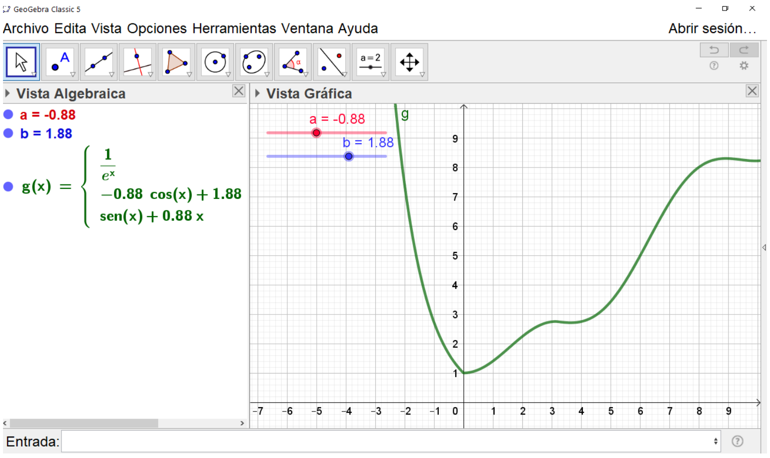

Ilustración 5. Elaboración propia

Ahora, la función se ha definido en R; pero los valores de a y b no son números enteros, lo que va a condicionar que para que el alumno pueda comprobar la solución no le sirva la mera percepción gráfica.

7.- Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} a\,sen\,x + b\cos x, & x < \dfrac{\pi}{2} \\ sen^2 x - a\cos x, & x \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Determina a y b para que sea continua para todos los valores de x.

En este ejercicio la función es continua para $x = 1$ y $\forall b \in R$. El alumno suele estar acostumbrado a que la solución sea única, lo que enriquece su percepción del resultado.

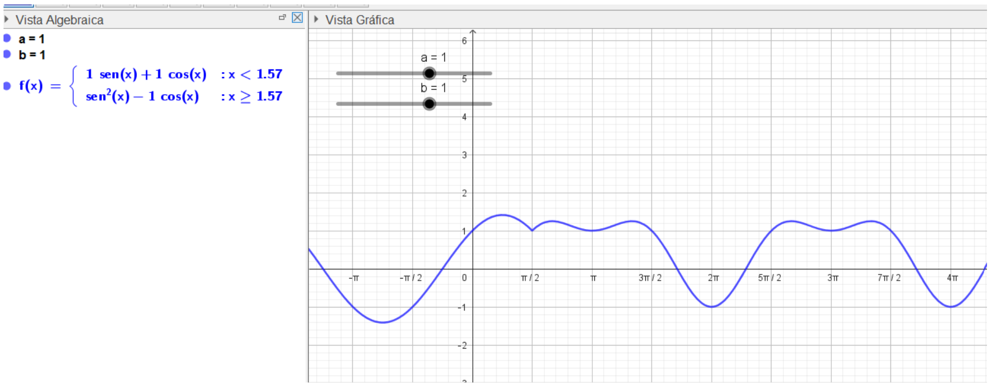

Ilustración 6. Elaboración propia

8.- Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -\infty < x \leq 0 \\ sen(x)+b & 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & si \;\; \pi \leq x < +\infty \end{cases}$ .Determine los valores de b para los que $f(x)$ es una función continua en R.

Este ejercicio no tiene solución. Si $b=0$ la función es continua en $x=0$ pero no en $x=\pi$, y si $b=1$ entonces es continua en $x=\pi$ pero no en $x=0$.

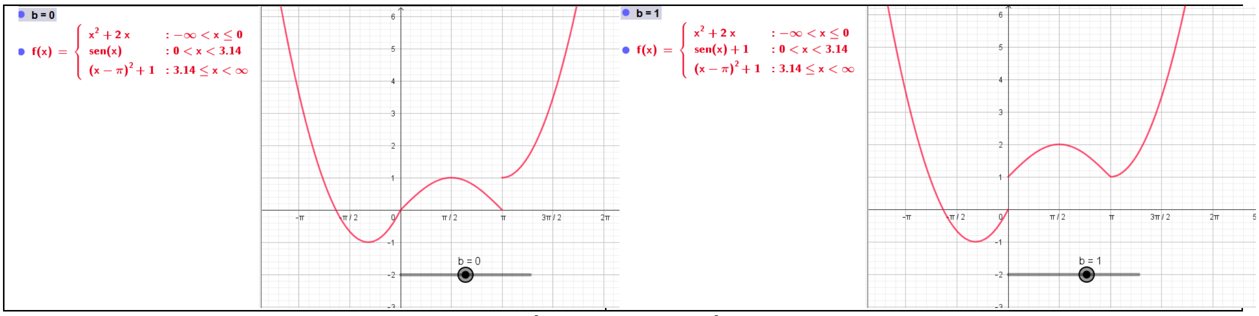

Ilustración 7. Elaboración propia

Recapitulando, la imagen de función continua que tienen asimilada los estudiantes es aquella que se puede dibujar de un solo trazo o cuya expresión escrita se asocia a una sola fórmula.

En estos conflictos intervienen muchas variantes, pero se pueden realizar una serie de acciones que potencian el aprendizaje del cálculo [16]:

- Enriquecer las concreciones de los conceptos.
- Mejorar los ejemplos y contraejemplos.
- Potenciar el uso del ordenador, tanto en el aula como en el autoaprendizaje.
- Observar que no todos los conceptos tienen una representación gráfica sencilla.
- Secuenciar los contenidos.

4. REFERENCIAS

[1] ARGÜELLO, A. ESTEBAN, F.L., DE LA FUNTE, C. (1996). *Investigación y práctica: relaciones y futuro*. En Puig, L. y Calderón, J. Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: M.E.C. (CIDE)

[2] AZCÁRATE, C. (1998) *Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. Vol.1.2, 235-243

[3] BLÁZQUEZ, S. y ORTEGA, T. (1997): *Las sucesiones como aproximación didáctica a los conceptos de función y límite funcional*. Actas de las VIII JAEM, 303-306. Salamanca

[4] BLÁZQUEZ, S.; GATICA, N.; ORTEGA, T. (2009). *Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional*. La Gaceta de la RSME, Vol.12.1, 145-168

[5] BROUSSEAU, G.; CHRISTO, L G. *Los estudios de doctorado de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad* La Gaceta de la RSME, Vol. 4.3 (2001) 591-615

[6] DUVAL, R. *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la RSME, Vol.9.1 (2006), 143-168

[7] DUVAL, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Eds.), Investigaciones en Matemática Educativa II 173-201. Cinvestav, México.

[8] ESTEBAN, P.; LLORENS, J.L. (noviembre 2003) *Aspectos comparativos en la extensión del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local*. SUMA 44, 45-52

[9] FERNÁNDEZ M. (1994) *Sobre los diversos lenguajes matemáticos y del paso de unos a otros*. I Seminario Nacional sobre lenguaje y matemáticas Revista SUMA 16, 35-47

[10] GODINO, J.D. (1996) *Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza*. En Puig, L y Calderón, J. Investigación y Didáctica de las Matemáticas. Madrid: M.E.C. (CIDE).

[11] GODINO, J. D. (2002). *Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen?* UNO. Revisa de Didáctica de las matemáticas, 29, 9-19.

[12] LOSADA, R. *Geogebra: la eficiencia de la intuición*. La Gaceta de la RSME, Vol.10.1 (2007), 223-239.

[13] ORTEGA DEL RINCÓN, T. (2022). Errores didácticos en Matemáticas. Síntesis Madrid, 109-128

[14] PENALVA, C. SÁNCHEZ, J. (1994) *Problemática de la enseñanza de los conceptos del cálculo*. SUMA 25-26

[15] PÉREZ, A. *El profesorado de matemáticas ante las Tecnologías de la Información y la Comunicación*. La Gaceta de la RSME, Vol.9.2 (2006), 521-544.

[16] RICO, L.; SIERRA, M.; y CASTRO, E. (1999). Didáctica de la matemática. En Rico, L y Madrid, D. (Eds.) *Las disciplinas didácticas en las Ciencias de la Educación y las Áreas curriculares*. Madrid: Síntesis.

[17] TALL, D.; VINNER, S. (1981) *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics Education, 12, 151-169