

ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN DOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS THALES DE 2º DE ESO: UNA PROPUESTA DE AULA.

García López, Alejandro, *Universidad de Granada, Granada*

Galindo Pérez, Anabel, *Universidad de Granada, Granada*

RESUMEN

En esta comunicación se analizan los errores cometidos por los participantes en dos problemas de las Olimpiadas Thales de Granada en 2º de ESO. Se inferirán algunas posibles causas y, a partir de ellas, se presenta una tarea como propuesta de aula para abordar las posibles dificultades encontradas.

Nivel educativo: esta comunicación va dirigida al curso de 2º de la ESO, curso donde se realiza esta prueba.

1. INTRODUCCIÓN

Desde principios del siglo XX, se llevan sucediendo una gran cantidad de competencias de resolución de problemas matemáticos en los que, no solamente se tenía en cuenta la correcta solución de los problemas, sino que también se valoraba la rapidez para resolverlos y la originalidad de las soluciones propuestas.

Según González et al. (2011), esta corriente de competencias se originó en el este de Europa, y poco a poco se fue extendiendo al resto del continente. Así, en el año 1964, la Real Sociedad Matemática Española (RSME) organiza la primera Olimpiada Matemática Nacional, dirigida al alumnado de COU (actualmente 2º Bachillerato).

La Olimpiada Matemática fue adquiriendo paulatinamente una mayor fama, y se fue extendiendo a más cursos. Así, en el curso 1984-1985, la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (SAEM Thales) organizó la primera Olimpiada Matemática para escuela primaria.

En este trabajo nos centraremos en la Olimpiada Matemática Thales dirigida al curso de 2º ESO. Esta olimpiada es de carácter público y voluntario y consta de dos fases: la provincial y la regional.

- La fase provincial actúa como clasificatoria para determinar qué alumnado participará en la fase regional. Se celebra en todas las provincias el mismo día y, además de la realización del examen, se promueve una jornada de convivencia con todo el alumnado, docentes y organizadores y organizadoras del evento.
- A la fase regional acuden los cinco finalistas de cada provincia y los dos finalistas de las ciudades autónomas. Además de las pruebas individuales y por equipos, se programan una serie de actividades culturales que se celebran durante los cinco días de convivencia con los compañeros de otras localidades.

Así, las Olimpiadas Matemáticas Thales tienen como objetivos: acercar las matemáticas a la vida del alumnado, haciendo que estos pierdan el miedo a dicha ciencia; fomentar la resolución de problemas matemáticos para que puedan desarrollar su capacidad reflexiva, de manera que se incentive un pensamiento lógico y racional; fomentar el gusto por las matemáticas y apoyar a la educación en matemáticas, contribuyendo a la enseñanza y el aprendizaje de estas.

En este trabajo nos centraremos en dos de los ejercicios de la fase provincial las Olimpiadas Matemáticas Thales de 2º ESO del curso 2022-2023 realizada en Granada. Previamente a la resolución y exposición de errores de estos ejercicios, realizaremos el análisis cognitivo de dichos ejercicios.

2. EJERCICIOS

En este apartado se describen los enunciados de los dos ejercicios estudiados en el trabajo. Los hemos denotado como ejercicios 4 y 6 por mantener la numeración empleada en la prueba Thales. Los ejercicios son los siguientes:

Ejercicio 4. Monedas

En una caja de muchas monedas de 1, 2 y 5 céntimos, Laura y Enrique toman un total de 100 monedas cada uno.

Sabemos que Laura tiene el doble número de monedas de 2 céntimos que de 1 céntimo, y que Enrique tiene el triple de monedas de dos céntimos que de un céntimo.

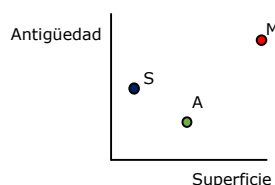
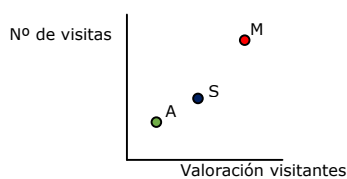
Si sabemos que Laura tiene un total de 3 euros, ¿sería posible que en sus 100 monedas pudiera tener al menos 8 monedas de un céntimo?

Sabemos que Enrique tiene el mismo número de monedas de 5 céntimos que Laura, ¿podría tener exactamente 3 € entre sus 100 monedas?

Ejercicio 6. Monumentos de Córdoba.

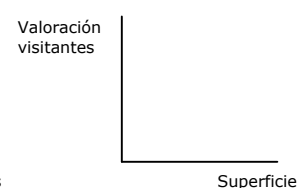
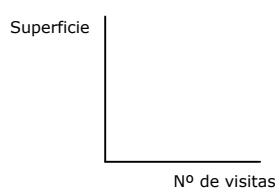
Las siguientes gráficas describen los tres monumentos de Córdoba:

A) Alcázar de los Reyes Católicos M) Mezquita S) Sinagoga



¿Cuál de los tres monumentos es el más visitado? ¿Y el que tiene menor superficie?

Teniendo en cuenta que las gráficas no están hechas con exactitud, completa las siguientes gráficas marcando en cada una los tres puntos A, M y S.



3. RELACIÓN CON EL CURRÍCULUM

El análisis cognitivo trata de realizar un análisis de expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje que proporciona el contenido.

Uno de los desafíos del docente en las expectativas de aprendizaje del contenido es comprender las competencias específicas a partir de los criterios de evaluación, puesto que debe definir objetivos didácticos que sean útiles para trabajar en el aula y que trabajen dichas competencias.

Por esto, se desarrolla a continuación un apartado dedicado a cada uno de los elementos para el análisis cognitivo del contenido considerado.

3.1. COMPETENCIAS ESPECÍFICAS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

De las competencias específicas y criterios de evaluación recogidos en el RD 217/2022 de 29 de marzo por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria, estos dos ejercicios analizados tratan los siguientes:

Competencias específicas	Criterios de evaluación
1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.	1.1 Interpretar problemas matemáticos organizando los datos, estableciendo las relaciones entre ellos y comprendiendo las preguntas formuladas. 1.2 Aplicar herramientas y estrategias apropiadas que contribuyan a la resolución de problemas.
2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.	2.1 Comprobar la corrección matemática de las soluciones de un problema. 2.2 Comprobar la validez de las soluciones de un problema y su coherencia en el contexto planteado, evaluando el alcance y repercusión de estas desde diferentes perspectivas (de género, de sostenibilidad, de consumo responsable, etc.).
3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.	3.1 Formular y comprobar conjeturas sencillas de forma guiada analizando patrones, propiedades y relaciones.
7. Representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos, información y resultados matemáticos, usando diferentes tecnologías, para visualizar ideas y estructurar procesos matemáticos.	7.2 Elaborar representaciones matemáticas que ayuden en la búsqueda de estrategias de resolución de una situación problematizada.

<p>8. Comunicar de forma individual y colectiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.</p>	<p>8.1 Comunicar información utilizando el lenguaje matemático apropiado, utilizando diferentes medios, incluidos los digitales, oralmente y por escrito, al describir, explicar y justificar razonamientos, procedimientos y conclusiones.</p> <p>8.2 Reconocer y emplear el lenguaje matemático presente en la vida cotidiana comunicando mensajes con contenido matemático con precisión y rigor.</p>
<p>9. Desarrollar destrezas personales, identificando y gestionando emociones, poniendo en práctica estrategias de aceptación del error como parte del proceso de aprendizaje y adaptándose ante situaciones de incertidumbre, para mejorar la perseverancia en la consecución de objetivos y el disfrute en el aprendizaje de las matemáticas.</p>	<p>9.1 Gestionar las emociones propias, desarrollar el autoconcepto matemático como herramienta, generando expectativas positivas ante nuevos retos matemáticos.</p> <p>9.2 Mostrar una actitud positiva y perseverante, aceptando la crítica razonada al hacer frente a las diferentes situaciones de aprendizaje de las matemáticas.</p>

Cuadro 1: competencias específicas y criterios de evaluación.

Así, en la siguiente tabla se recogen los criterios de evaluación correspondientes a cada ejercicio.

Ejercicio\Competencia	CE 1	CE 2	CE 3	CE 7	CE 8	CE 9
Ejercicio 4	1.1., 1.2.	2.1., 2.2.	3.1.		8.1., 8.2.	9.1., 9.2.
Ejercicio 6	1.1., 1.2.	2.1. .		7.2.		9.1., 9.2.

Cuadro 2: relación entre competencias específicas y ejercicios.

Siguiendo con la clasificación de fenomenológica de los contenidos proporcionada por Rico (2016), nos encontramos con la descripción de cuatro sentidos: numérico, espacial, de la medida y estocástico. En relación con los ejercicios de las olimpiadas, encontramos una fuerte relación entre el sentido numérico (caracterizado por aplicar las relaciones numéricas y las operaciones de forma razonada para resolver problemas) y el ejercicio 4, ya que el alumnado debe controlar conceptos como divisibilidad y desarrollar una estrategia útil para resolver el problema, teniendo en cuenta relaciones numéricas entre los distintos datos.

En cambio, el ejercicio 6 requiere un mayor sentido estocástico, el cual implica la toma de decisiones basada en información estadística, razonar esa información e interpretarla. Precisamente, este ejercicio requiere de comprender la agrupación de información en una gráfica para poder responder las preguntas planteadas.

4. SOLUCIONES

En este apartado, expondremos una solución posible de los dos ejercicios estudiados. La solución no es única, no obstante, hemos considerado que son las dos soluciones idóneas, por su originalidad, razonamiento y muestra de los conocimientos que se exigían. Así, las soluciones son las siguientes:

Solución ejercicio 4

El ejercicio podría resolverse de distintas maneras. Analizando la mayoría de las estrategias que han empleado, hemos decidido resolverlo de forma numérica, sin necesidad de emplear sistemas de ecuaciones.

Comenzamos estudiando el caso de Laura. Se comprueba fácilmente que es imposible que Laura tenga 8 monedas de 1 ct, puesto que entonces tendría 16 de 2 cts y, dado que tiene 100 monedas debería tener 76 monedas de 5 cts. Lo cual sería incorrecto, puesto que tendría más de 3 euros. Así, nos fijamos que es necesario reducir bastante las monedas de 5 cts. Si reducimos 3 monedas de 5 cts tendríamos 1 moneda de 1 ct más y 2 de 2 cts, lo cual reduciría 10 cts (y conservaría el número de monedas). Así, tenemos lo siguiente: 8 monedas de 1 ct+16 monedas de 2 cts+76 monedas de 5 cts=420 cts. Como cada 3 monedas de 5 cts que quitamos (añadiendo una de 1 ct y dos de 2 cts) reduce 10 cts el total, debemos quitar monedas hasta que la suma anterior nos de 300 cts. Por tanto, debemos quitar 120 cts, y como cada 3 que quitamos, resta 10 cts, debemos quitar 36 monedas de 5 cts. Como hemos quitado 36 monedas de 5, añadiremos $\frac{1}{3}$ de estas como monedas de 1 y $\frac{2}{3}$ como monedas de 2. Se tienen entonces 20 monedas de 1 ct, 40 monedas de 2 cts y 40 monedas de 5 cts. Por otro lado, como Enrique tiene las mismas monedas de 5 cts que Laura, Enrique tiene 40 monedas de 5 cts, por tanto, tiene 200 cts en monedas de 5. Así, los otros 100 cts deben repartirse entre 60 monedas de 1 y 2 cts. Como hay el triple de monedas de 2 cts que de 1 ct, se tiene que las monedas de 1 ct representan $\frac{1}{4}$ de las 60, y las de 2 cts $\frac{3}{4}$, luego Enrique tiene 15 monedas de 1 ct y 45 de 2 cts. Pero, si sumamos todo se tiene:

15 monedas de 1 ct + 45 monedas de 2 cts + 40 monedas de 5 cts = 305 cts.

Por tanto, Enrique no puede tener exactamente 3 € entre sus 100 monedas.

Solución ejercicio 6

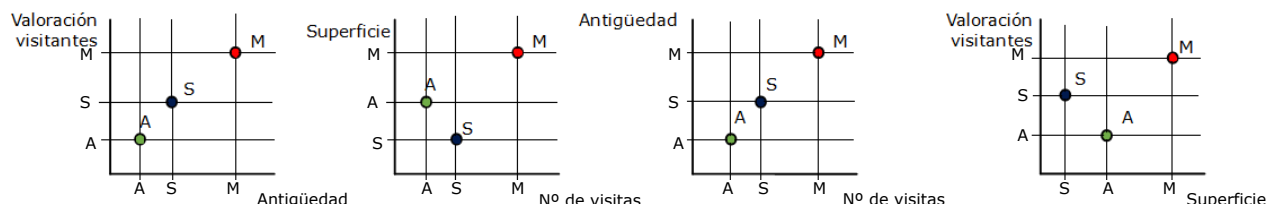
Para la resolución del ejercicio es necesario interpretar las gráficas que nos dan para sacar la relación entre las variables. El planteamiento que vamos a seguir para ver esta vinculación será el utilizado por muchos de los estudiantes que obtuvieron una solución correcta.

Para conocer el monumento más visitado, observamos el eje Y en la primera gráfica del enunciado. Como la Mezquita es la que le corresponde el valor más grande del eje Y, será la más visitada.

Para mirar el que menos superficie tiene, nos fijamos en el eje X de la segunda gráfica del enunciado. La sinagoga es el monumento que le corresponde un menor número en el eje X, por tanto será la menos visitada.

Para completar las gráficas, en cada una de ellas, la clave será marcar en el eje de abscisas y en el eje de ordenadas los puntos M, S y A. Veamos la primera gráfica que nos pide: marcamos en el eje de la Antigüedad los puntos M, S y A observando el eje de la Antigüedad de la segunda gráfica del enunciado, el cual se corresponde con el eje de ordenadas, intentando respetar las distancia entre

puntos. Repetimos lo mismo con el eje de la valoración de visitantes observando el eje X de la primera gráfica del enunciado. Una vez obtenidos los puntos en los ejes, los prolongamos en líneas rectas perpendiculares al eje donde estén dibujados. Los puntos finales vendrán dados por el punto de intersección entre las dos rectas. Reiterando este proceso en todas las gráficas obtenemos la solución final.



5. RESULTADOS

En este apartado comentamos los resultados obtenidos en los dos ejercicios revisados de las Olimpiadas Matemáticas Thales del año 2022-2023. Ambos ejercicios están puntuados sobre 10, así que comentaremos los principales parámetros estadísticos obtenidos.

Ejercicio 4

El ejercicio 4 ha tenido un rendimiento bastante bajo, obteniéndose una media de 2,8 sobre 10. En el siguiente apartado se explicarán posibles causas de esta nota tan baja. Por otro lado, la moda del ejercicio es 1, que, por criterios de corrección ha sido la nota asignada a los que han escrito algo, pero no han realizado ningún razonamiento correcto del ejercicio. Así, se expone que una gran cantidad del alumnado no ha intentado el ejercicio. Las causas de este suceso se explicarán en el siguiente apartado.

Ejercicio 6

En este ejercicio nos encontramos con una diferencia notable respecto al anterior. La media fue de 6,08 sobre 10, mientras que la moda fue 10. Además la desviación típica es de 3,52. De esto, extraemos que los resultados fueron buenos, pero las notas se colocan en los extremos. Esto se debe a que en general, el alumnado que sabía realizar alguna de las gráficas, sabía hacerlas todas bien. Sin embargo, no todos han contestado a las dos preguntas iniciales cuyo peso era de dos puntos, por este motivo la nota de 8 sobre 10 es muy recurrente. Además, la segunda nota con más frecuencia es de 2, debido a que muchos de ellos contestaban bien solamente la primera pregunta inicial y realizaban de manera incorrecta las gráficas, teniendo el peso de dos puntos.

6. ERRORES

En este apartado analizamos los principales errores apreciados en la corrección de los ejercicios 4 y 6 de las Olimpiadas Matemáticas. El análisis de errores de estos dos ejercicios resulta bastante complicado, pues una gran parte del alumnado no ha contestado alguno de los dos ejercicios. No obstante, hemos explicado los principales errores observados en la corrección, con la finalidad de poder desarrollar una tarea que pudiera evitar estos errores en posibles pruebas futuras.

6.1. ERRORES EJERCICIO 4

Basándonos en el apartado anterior (resultados) podemos apreciar que el ejercicio 4 contiene una gran cantidad de errores distintos. Es por esto, y por la extensión de esta comunicación que hemos decidido resumir los errores en 3 categorías:

- Error de no completar el ejercicio: hace referencia a que ha dejado en blanco el ejercicio o no ha realizado casi ningún razonamiento.
- Errores de no validar las soluciones con respecto a lo que pide el enunciado: estos errores se refieren a aquellos en los que, si bien ha argumentado correctamente, no ha tenido en consideración algunos de los datos. El más frecuente de estos ha sido ignorar el número de monedas de cada individuo, de manera que, aunque sus monedas sumaban las cantidades exigidas, el número total de monedas era incorrecto.
- Errores de interpretación del enunciado: aquí nos encontramos ante el error más frecuente de este ejercicio. Concretando más, el error surge de la interpretación de la expresión "al menos" que aparece en el enunciado. Gran parte de las resoluciones que no contenían ninguno de los dos tipos anteriores de errores sí los contenían de este tipo. El problema principal es que el alumnado han interpretado la expresión "al menos 8" como "exactamente 8", haciendo que la resolución del ejercicio sea imposible.

6.2. ERRORES EJERCICIO 6

Analizando los errores referentes al ejercicio 6, nos encontramos con los siguientes errores:

- Error de no completar el ejercicio: al igual que en el ejercicio anterior, nos encontramos como error que el alumnado no ha intentado ningún apartado que se pedía en el ejercicio. Por otro lado, incluimos también en este error el de no contestar las dos preguntas iniciales, el cual ha sido muy recurrente, pero sí completar las gráficas de forma correcta.
- Error de interpretación de gráficas: es frecuente encontrar en diversos exámenes que la respuesta al monumento con menor superficie es el alcázar de de los Reyes Cristianos, por lo que cometen un error al interpretar el segundo gráfico del enunciado.
- Error de representación de puntos en un sistema de coordenadas: con este error nos referimos a situar en un plano cartesiano puntos ubicados en él. Este es el error que más se ha repetido ya que la gran parte de los que han tenido mal la representación de una gráfica, tenían mal todas las demás.

7. DIFICULTADES

Una vez descritos los errores cometidos por el alumnado, procedemos a analizar las causas que originan los distintos errores, las cuales reciben el nombre de dificultades (Fernández, 2016). Este análisis de errores y dificultades tiene el propósito de poder elaborar una estrategia para superar dichas limitaciones para el aprendizaje.

7.1. DIFICULTADES EJERCICIO 4

- Dificultades asociadas a no completar el ejercicio: estos errores son los más complicados de analizar y de afrontar, ya que el alumnado ha podido dejar su ejercicio en blanco o casi en blanco por diversos motivos. Creemos que la dificultad más significativa detrás de este hecho se trata de una dificultad asociada a la comprensión del lenguaje: este problema puede resultar algo complejo de entender para el alumnado de segundo de la ESO. Al contener tantos datos, puede llevar al alumnado a no querer realizar el problema, o bien intentar dejarlo hasta el final. Debemos recordar que estos dos ejercicios forman parte de un examen con 6 ejercicios totales, así que esta dificultad podría conllevar a un problema de tiempo para realizar el examen completo.
- Dificultades al validar de soluciones comprobando que obtienen lo que pide el enunciado: estos errores son bastante más sencillos de analizar y "combatir". El ejemplo de este error más apreciado es el no tener en consideración el número de monedas de cada uno. Debemos considerar que dicho dato es el primero en aparecer, por lo que es posible que olvidasen dicho dato ante la abundancia de estos.
- Dificultades de interpretación del enunciado: si bien es cierto que hay casos en los que estas dificultades se mezclen con las anteriores, no son iguales. Con dificultades de interpretar el enunciado no nos referimos a no tener en consideración un dato, si no a no comprender dicho dato. Así, el mayor error apreciado ha sido la interpretación de la expresión "al menos 8" como exactamente 8. Esto, ha llevado a muchos creer que no era posible la resolución del ejercicio y a responder las preguntas de forma equivocada. La dificultad asociada consiste no únicamente en no entender la expresión "al menos", si no en únicamente fijarse en el dato numérico, sin apreciar la información que nos aporta dicha expresión.

7.2. DIFICULTADES EJERCICIO 6

- Dificultad asociada a no completar el ejercicio: el no contestar nada del ejercicio puede venir propiciado de la dificultad del tiempo, ya que se trata del último ejercicio en una lista de seis cuya resolución tenía un tiempo límite. Por lo que es posible que muchos de ellos no tuvieran tiempo para plantear el problema. Por otro lado, resolver las dos cuestiones iniciales era de menor complejidad que la segunda parte. Este hecho nos lleva a pensar que el error de no contestar las preguntas iniciales viene causado por la dificultad de no leer con detenimiento el enunciado entero y pasar directamente a completar las gráficas, olvidando su resolución.
- Dificultades relacionadas con la comprensión de sistema de representación gráficos: estas están relacionadas tanto con el error de interpretar gráficas como con el de representar puntos.
 - El alumnado encuentra una dificultad para interpretar los ejes de coordenadas. En la segunda pregunta, muchos responden que el monumento con menor superficie es el Alcázar al situarse más cerca al eje que representa la variable Superficie. Con este razonamiento

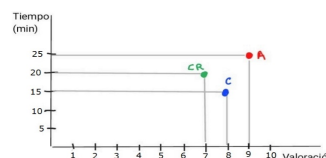
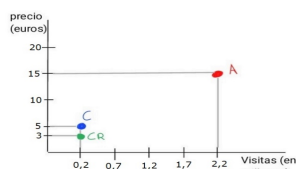
de que cuanto más cercano esté el punto al eje, más valor tiene, muchos de ellos construyen incorrectamente las gráficas.

- Otra dificultad asociada a los errores comentados se trata de no conocer el significado del plano cartesiano, entendiendo solamente lo que representa la recta real. Esto ha derivado en que el alumnado solo eran capaces de observar un eje para hacer las gráficas, con preferencia hacia el eje de ordenadas. Esta dificultad se ha traducido en que han observado la variable que representaba el eje de abscisas y han imitado la gráfica donde aparecía en el otro eje.
- Como última dificultad que hemos observado es el desconocimiento de la invariancia de los ejes. Esta dificultad ha derivado en el uso indistinto de los ejes de coordenadas, cambiándolos entre sí en las distintas gráficas a representar.

8. TAREA DE CLASE

Basándonos en los errores observados en los dos ejercicios, hemos diseñado una situación de aprendizaje para poder solventar dichos errores.

Tarea de clase: un instituto hacer una excursión turística por Granada. Han preguntado a una agencia de turismo, la cual les ha facilitado varios gráficos que dan información sobre posibles monumentos a visitar. Para ahorrar espacio, en un primer plano, han representado en el eje X el número de visitas el último año y en el eje Y el precio. En una segunda gráfica, se representa en los ejes cartesianos, la valoración de expertos de cada monumento en una escala del 1 al 10, en el eje de abscisas y el tiempo (en minutos) que se tarda del instituto al monumento.



1. ¿Qué monumento tiene mayor precio? ¿Cuál es el precio? ¿Y el número de visitas de ese monumento en el último año?
2. ¿Cuál es el monumento más cercano al instituto? ¿Tiene el menor precio?
3. ¿Qué valoración tiene cada monumento?
4. ¿El monumento con mayor visita coincide con el de mejor valoración? ¿Coincide con el más lejano?
5. ¿Quién tiene mayor número de visitas: la catedral o la capilla real? ¿Y mayor precio entre estas dos?

Previamente a ir a la excursión, el alumnado debe firmar una autorización y pagar 5 euros cada uno. Los gemelos Pérez (Carlos y María) deciden romper la hucha donde guardaban el dinero de cuando eran pequeños. Cada uno ha cogido 158 monedas, las cuales son de 1, 2 y 5 cts. Sin embargo, no saben cuántas han cogido de cada valor. Lo único que saben es lo siguiente:

- Carlos tiene el triple de monedas de 2 cts que de 1 ct.
- María y Carlos tienen el mismo número de monedas de 2 cts.
- María tiene más monedas de 5 cts que de 1 ct.

¿Es posible que ambos tengan 3 euros, sabiendo que María tiene al menos 30 monedas de 5?

7.1. GESTIÓN EN EL AULA

La tarea se puede dividir en dos partes, una primera más relacionada con el ejercicio 6, y la segunda con una mayor relación con el ejercicio 4. Es importante remarcar que esta tarea no está diseñada para que la realice el alumnado de forma individual, sino para que el profesorado pueda ayudarles con su resolución, y así, poder prepararles para la realización de la prueba Thales.

Dentro de las dificultades del ejercicio 6, la que tienen mayor importancia están relacionadas con la interpretación del plano cartesiano. Es por ello, que se presentan una serie de preguntas donde se pretende que obtengan información a través del mismo. En las preguntas que deben contestar se pretende que el alumnado tenga que interpretar los datos tanto del eje X como del eje Y para obtener la información que se le pregunta, ya que un error muy recurrente ha sido precisamente solo observar el eje de abscisas para representar los puntos. Además, también se hacen preguntas donde es necesario ver los ejes como una recta real, donde el punto de intersección entre los dos ejes representa el valor numérico 0. De esta forma, se pretende solventar el error de pensar que el punto más cercano al eje que se observa representa el mayor valor.

Por ende, aunque no sea una réplica del ejercicio original, permite al alumnado entender y practicar los ejes de coordenadas e interpretar la información que representan. Esto les da las herramientas para poder construir ellos las propias gráficas, pudiendo realizar correctamente el ejercicio de las olimpiadas.

En relación con las dificultades observadas en el ejercicio 4, las que adquieren una mayor importancia son las dificultades asociadas a la interpretación del enunciado, siendo el mayor error relacionado la incorrecta interpretación de la expresión "al menos". Así, se plantea un ejercicio de características similares al ejercicio 4 de las Olimpiadas Matemáticas Thales estudiados en este trabajo, apareciendo la misma expresión. Sería recomendable explicar al alumnado diversas expresiones similares, con el fin de no solo "combatir" este error, si no tratar directamente la dificultad asociada.

Dadas las características similares del ejercicio con el estudiado en este trabajo, las otras dos dificultades serán afrontadas únicamente con la resolución del ejercicio planteado.

REFERENCIAS

- [1] Fernández-Plaza, J.A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Coords.). *Elementos de Didáctica de Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103-118). Pirámide.
- [2] González, L. E., Española, R. S. M., y Gimeno, M. Á. V. (2011). *Historia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*. Real Sociedad Matemática Española.
- [3] Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L.Rico y A.Moreno (Coords.). *Elementos de Didáctica de Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100)