

ANALIZANDO LA COMPRENSIÓN QUE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO TIENEN DE LA DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Carmen Batanero, *Universidad de Granada*

Nuria Begué, *Universidad de Zaragoza*

María M. Gea, *Universidad de Granada*

RESUMEN

La distribución muestral se estudia de manera formal en el Bachillerato de Ciencias Sociales, donde se presentan también el teorema central del límite y las aplicaciones de la distribución muestral en inferencia. En este trabajo analizamos la comprensión intuitiva de la esperanza matemática y variabilidad de la distribución muestral de una población binomial, pidiendo a los estudiantes que indiquen cuatro valores probables en un experimento de lanzamiento de monedas. El análisis de los datos muestra buena comprensión de la representatividad, pero la comprensión de la variabilidad es insuficiente.

Nivel educativo: Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de muestreo es objeto de investigación desde la didáctica de la matemática, porque conecta la probabilidad con la estadística, jugando un papel fundamental en la estimación de la probabilidad desde el enfoque frecuencial y la ley de los grandes números.

Además, si consideramos los documentos curriculares que actualmente guían los contenidos objeto de enseñanza en España, se observa que los conceptos de muestra y significado frecuencial de la probabilidad aparecen desde tercer ciclo de Educación Primaria (MEFP, 2022a), continuando su estudio hasta cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), donde se profundiza en la idea de representatividad de una muestra (MEFP, 2022b).

En el caso de Bachillerato, la Tabla 1 permite comparar el anterior y el actual marco curricular (MECD, 2015; MEFP, 2022c), pudiendo observar diferencias (subrayadas en la tabla). Aunque en ambas normativas los contenidos relacionados con el muestreo se introducen gradualmente en cada modalidad (en particular, las distribuciones de probabilidad binomial y normal, junto con los parámetros que las caracterizan, así como el concepto de distribución muestral y su aplicación en inferencia), el análisis revela la incorporación de la probabilidad desde primer curso de la modalidad de Ciencias y Tecnología, así como el énfasis en la toma de decisiones en base al análisis del muestreo.

Tabla 1. Contenidos relacionados con el muestreo para Bachillerato, según normativa

Curso - Ley	Contenidos (MECD, 2015) o Saberes básicos (MEFP, 2022c)	
Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales I	MECD	<p>Sucesos y asignación de probabilidades a sucesos (regla de Laplace y mediante su frecuencia relativa). Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial (caracterización e identificación del modelo; cálculo de probabilidades). Variables aleatorias continuas. Función de densidad y de distribución. Interpretación de la media, varianza y desviación típica. Distribución normal (tipificación; cálculo de probabilidades y mediante la aproximación de la distribución binomial por la normal).</p>
	MEFP	<p>Incertidumbre: Estimación de la probabilidad a partir de la frecuencia relativa. Cálculo de probabilidades en experimentos simples: la regla de Laplace y en combinación con diferentes técnicas de recuento. Distribuciones de probabilidad: Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades mediante herramientas tecnológicas. Estimación de probabilidades mediante la aproximación de la binomial por la normal. Inferencia: <u>Diseño de estudios estadísticos relacionados con las ciencias sociales utilizando herramientas digitales. Técnicas de muestreo sencillas. Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con herramientas tecnológicas con el fin de emitir juicios y tomar decisiones: estimación puntual.</u></p>
Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales II	MECD	<p>Profundización en la Teoría de la Probabilidad. Asignación de probabilidades a sucesos (regla de Laplace y mediante frecuencia relativa). Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia. Población y muestra. Métodos de selección de una muestra. Tamaño y representatividad de una muestra. Estadística paramétrica. Parámetros de una población y estadísticos a partir de una muestra. Estimación puntual. Media y desviación típica de la media muestral y de la proporción muestral. Distribución de la media muestral en una población normal. Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. <u>Relación entre confianza, error y tamaño muestral.</u> Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución normal <u>con desviación típica conocida.</u> Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución <u>de modelo desconocido</u> y para la proporción <u>en el caso de muestras grandes.</u></p>

	MEFP	Incertidumbre: Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia. Distribuciones de probabilidad: Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Distribuciones binomial y normal. Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades mediante herramientas tecnológicas. Inferencia: Selección de muestras representativas. Técnicas de muestreo. Estimación de la media, la proporción y la desviación típica. Aproximación de la distribución de la media y de la proporción muestrales por la normal. Intervalos de confianza basados en la distribución normal: construcción, análisis y toma de decisiones en situaciones contextualizadas. Herramientas digitales en la realización de estudios estadísticos.
Matemáticas I	MEFP	Incertidumbre: Estimación de la probabilidad a partir del concepto de frecuencia relativa. Cálculo de probabilidades en experimentos simples: la regla de Laplace en situaciones de equiprobabilidad y en combinación con diferentes técnicas de recuento. Inferencia: Análisis de muestras unidimensionales y bidimensionales con herramientas tecnológicas con el fin de emitir juicios y tomar decisiones.
Matemáticas II	MECD	Sucesos. Asignación de probabilidades a sucesos (regla de Laplace y mediante frecuencia relativa). Aplicación de la combinatoria al cálculo de probabilidades. Experimentos simples y compuestos. Probabilidad condicionada. Dependencia e independencia de sucesos. Variables aleatorias discretas. Distribución de probabilidad. Media, varianza y desviación típica. Distribución binomial (caracterización e identificación del modelo; cálculo de probabilidades). Distribución normal (tipificación; cálculo de probabilidades y mediante aproximación de la binomial por la normal).
	MEFP	Incertidumbre: Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos aleatorios. Diagramas de árbol y tablas de contingencia. Distribuciones de probabilidad. Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución. Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal. Cálculo de probabilidades asociadas mediante herramientas tecnológicas.

A pesar de que los contenidos relacionados con el muestreo se introducen gradualmente, según los documentos curriculares, las investigaciones centradas en la comprensión de las ideas básicas asociadas al muestreo ponen en relieve que los participantes no perciben sus propiedades. Para contribuir con información a este problema, este trabajo tiene como objetivo analizar la comprensión que una muestra de estudiantes de segundo de Bachillerato presenta sobre la relación entre la proporción de una población y el valor medio esperado en cuatro muestras de dicha población. Así mismo, se analiza la comprensión de la variabilidad esperada en dichas muestras.

2. MARCO TEÓRICO

La comprensión del muestreo requiere la de dos conceptos aparentemente opuestos: la representatividad y la variabilidad muestral (Rubin et al. 1991;

Saldanha y Thompson, 2002). Por un lado, la representatividad muestral implica que una muestra aleatoria será similar a la población de la que es tomada si el tamaño de la misma es suficiente y, por tanto, se puede inferir desde su análisis las características de la población. Por otro lado, la variabilidad inherente al proceso de muestreo implica que la composición de cada muestra variará.

El concepto de distribución es fundamental para comprender la idea de muestreo (Burril y Biehler, 2011), dando lugar a la presencia de tres tipos de distribución, que se describen brevemente a continuación (Harradine et al., 2011):

- La *distribución teórica de probabilidad*, que modela los valores de una variable aleatoria tomada de una población o un proceso. Dicha distribución depende de algún valor (*parámetro*), que es generalmente desconocido. En nuestro caso, se considera la distribución binomial X de parámetros n (tamaño de la muestra) y p (proporción de éxitos), $B(n;p)$.
- La *distribución del conjunto de datos*, que se obtiene a partir de la realización de varias repeticiones independientes del experimento aleatorio. Este conjunto de datos recibe el nombre de *muestra* (en nuestro caso, *muestra aleatoria simple*) y desde esta se obtienen distintos estadísticos; por ejemplo, la media muestral (\bar{x}) o la desviación típica muestral (s). En nuestro estudio, se pide el número de éxitos en cuatro muestras del mismo tamaño.
- La *distribución en el muestreo* de un estadístico, que se define como la distribución de probabilidad de todos los posibles valores que puede tomar el estadístico muestral, en relación a las posibles muestras que constituyen el espacio muestral asociado al proceso o población que se desea estudiar, y constituye una variable aleatoria; la distribución es la distribución en el muestreo. En nuestro estudio, se piden cuatro *muestras*, cuyo número esperado de éxitos es np y con desviación típica $\sqrt{np(1-p)}$.

Batanero (2019), al igual que Harradine et al. (2011), indican que el razonamiento inferencial exige que se coordinen los siguientes conceptos: los datos, la población de donde se tomaron y las posibles muestras de la misma. Por tanto, exige relacionar las tres distribuciones citadas anteriormente. Asimismo, la idea de muestreo y distribución muestral requiere de una adecuada comprensión del concepto de muestreo. Por tanto, no solamente se exige comprender los conceptos sino las relaciones entre ellos, lo que supone una gran complejidad semiótica y puede explicar los múltiples errores que cometen los estudiantes.

2.1. ANTECEDENTES

Las primeras investigaciones relacionadas con el muestreo se realizaron desde el campo de la psicología, y se centraban en el contexto de la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Harradine et al., 2011), en términos de *heurísticas*. Una heurística se concibe como una regla de conducta, de carácter generalmente inconsciente, que guía la resolución de las tareas de razonamiento complejas, porque reduce la información de las mismas. En particular, caracterizamos las siguientes heurísticas:

- La *heurística de representatividad* (Tversky y Kahneman, 1982) implica que la probabilidad de obtener una muestra se estima comparando la similitud que guarda la muestra con la población a la que pertenece o bien con el proceso de muestreo que la ha generado.
- La *heurística de la disponibilidad* (Tversky y Kahneman, 1974) consiste en estimar la verosimilitud de un suceso basándose en la información previa que una persona tiene sobre la ocurrencia de dicho suceso de interés.

Otra serie de investigaciones están centradas en identificar la comprensión que los estudiantes muestran sobre el concepto de muestra o propiedades asociadas al muestreo. Estas investigaciones ponen en relieve la existencia de dificultades en las ideas asociadas al muestreo. En particular, la investigación de Serrano (1996) muestra las dificultades de los estudiantes para juzgar si una secuencia es aleatoria o la presencia del sesgo de equiprobabilidad. En la investigación de Shaughnessy et al. (2004) se describen tres concepciones sobre las muestras: a) aditiva (la más frecuente) que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población; b) proporcional, en la que se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y c) distribucional (la menos frecuente), donde se comprende tanto el valor esperado como la variación en la distribución muestral. En relación con el concepto de variabilidad, se sugiere que no se comprende la relación de la variabilidad y el tamaño de la muestra.

3. MÉTODO

La muestra estuvo constituida por un total de 234 estudiantes de 2º bachillerato de cinco centros diferentes, de los cuales 85 estudiantes cursaban el bachillerato de Ciencias Sociales y 149 el bachillerato de Ciencias.

El fenómeno aleatorio presentado a los estudiantes fue el lanzamiento de 100 monedas (Figura 1). En concreto, se pidió producir el número de caras (y cruces) en cuatro muestras probables de tamaño 100. La variable aleatoria definida como el número de monedas que caen con la cara hacia arriba (X) sigue una distribución binomial, donde n toma el valor 100, y según el significado clásico de la probabilidad, la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$ (p).

Tarea. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 monedas obteniendo los siguientes resultados: 53 caen con la cara hacia arriba y 47 caen con la cruz hacia arriba
 Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento. Cada niño lanza las 100 monedas y obtendrá algunas con la cara hacia arriba y otras con cruz hacia arriba. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

Elena	Clara	Matías	Rosa
Cara:	Cara:	Cara:	Cara:
Cruz:	Cruz:	Cruz:	Cruz:

Figura 1. Pregunta del cuestionario.

En primer lugar, se realiza el análisis de la distribución del valor esperado de

las muestras dadas por los alumnos. En este caso, puesto que la distribución que sigue la variable aleatoria es Binomial: $B(100; 0,5)$ y se puede aplicar la aproximación normal a dicha distribución binomial, la media de cuatro valores aleatorios es 50 y la desviación típica de la distribución muestral es $\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2,5$.

Por tanto, se consideran como correctas aquellas respuestas cuyo promedio asociado a los cuatro valores para el número de caras oscile dentro del intervalo $[47,5-52,5]$. Las respuestas denominadas como aceptables se asocian con el intervalo $[45-55]$, que recoge el 95% de los casos en la distribución normal y se encuentren fuera del intervalo considerado como correcto.

El análisis de la comprensión de la variabilidad se apoya en el estudio del rango de los valores dados por los alumnos. En la Figura 2 se presenta la distribución empírica muestral de los rangos correspondiente a la tarea propuesta, obtenida mediante 10000 simulaciones. Observamos que la distribución del rango no es simétrica, siendo infrecuentes los valores altos del rango.

Desde la Figura 2 se obtienen los intervalos del rango $[6-15]$ y $[3-20]$, que incluyen el 68% y el 95% de los casos, respectivamente; considerando los primeros como variabilidad normativa y los segundos como aceptable. Si el rango obtenido es mayor a 20, se considera que hay una variabilidad excesiva y alta concentración en caso inferior a 3. En ambos casos, se concluye que el sujeto no presenta una comprensión adecuada de la variabilidad muestral.

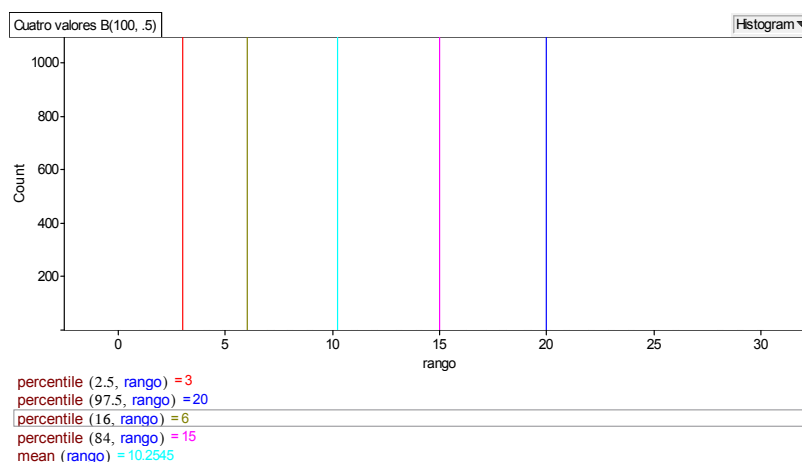
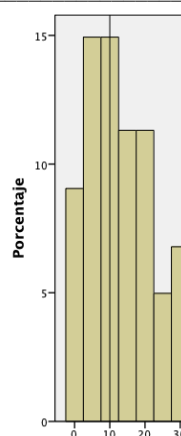


Figura 2. Distribución muestral empírica de los rangos en muestras de 4 elementos de la distribución $B(100; 0,5)$

4. RESULTADOS

En primer lugar, el análisis se centra en el valor medio a partir de la distribución asociada al número medio de las cuatro estimaciones en la Figura 3.a. Este análisis muestra que el intervalo modal se sitúa próximo al valor teórico esperado. Por tanto, este resultado nos indica que la mayor parte de los estudiantes identificaron correctamente la equiprobabilidad de los sucesos elementales que constituyen el fenómeno aleatorio.

a. Valor medio



b. Rango

Figura 3. Distribución del valor medio y rango de cuatro valores del número de caras en el lanzamiento de 100 monedas

El análisis del gráfico se completa con la Tabla 2, donde resulta destacable que el 47,7% de los estudiantes realizan una estimación normativa del valor esperado. Además, el 70% aproximadamente de las respuestas se incluye en el intervalo que contiene al 95% de los casos, que se corresponde con las respuestas que pueden considerarse aceptables. Por lo que los participantes en el estudio presentan una adecuada estimación del valor esperado.

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes por grupo, según valor medio en las cuatro estimaciones del valor esperado en el lanzamiento de 100 monedas

Valor medio de las cuatro estimaciones	Bachillerato (n=234)
Estimación normativa [47,5-52,5]	47,7
Estimación aceptable [45-55] ¹	21,3
Menores que el aceptable (< 45)	15,2
Mayores que el aceptable (>55)	11,1
No completa	4,7

¹Fuera del intervalo normativo

El análisis del diagrama de caja del valor medio (Figura 4.a) revela la simetría de la distribución asociada a la media, donde el valor de la mediana coincide prácticamente con el valor medio teórico. Por un lado, indica que los valores que toma el rango intercuartílico se corresponden de manera aproximada con los extremos que forman el intervalo que contiene al 68% de las respuestas consideradas como estimación normativa. No obstante, si analizamos la Tabla 2, observamos un 26,3% de estudiantes que presentan la heurística de la representatividad (Kahneman et al., 1982), tratando de compensar por exceso o defecto el dato dado en el enunciado. Además, el diagrama de caja identifica valores atípicos tanto por defecto como por exceso.

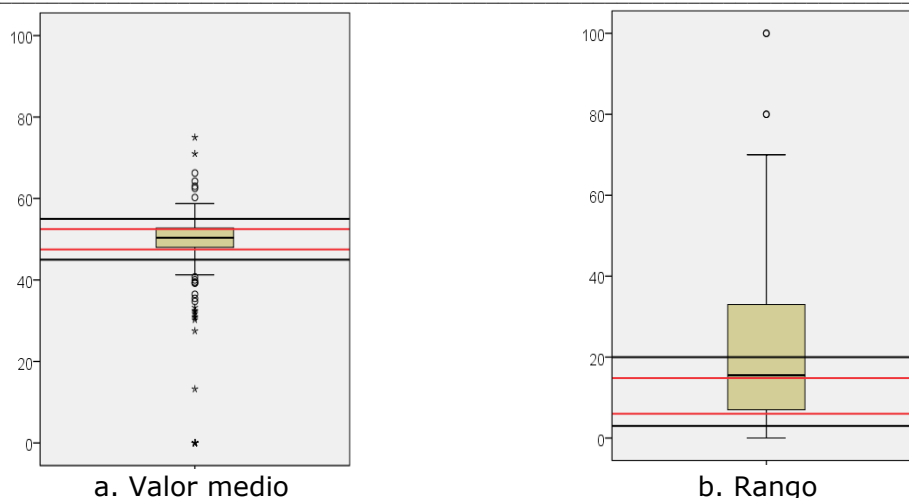


Figura 4. Diagramas de caja del número medio y rango de 4 valores del número de caras en el lanzamiento de 100 monedas

En cuanto al análisis de la variabilidad, la Figura 3.b muestra la distribución asociada al rango de las cuatro muestras probables del lanzamiento de 100 monedas, donde la mayoría de los estudiantes producen rangos por encima del valor medio esperado, llegando a generar muestras cuyo valor para el rango toma incluso el valor 100.

Por un lado, destaca el 30,6% de estudiantes que proporcionan muestras con variabilidad normativa (Tabla 3). De hecho, se obtiene como resultado que, aproximadamente, el 50% de los estudiantes conceden una variabilidad adecuada a las muestras dadas. No obstante, el análisis de los resultados de la Tabla 3 también indica que la mitad de los estudiantes proporcionan muestras cuya variabilidad se localiza en los extremos, es decir, o la proporción de caras se localiza muy próximo al valor medio teórico (12,1%) o las muestras presentan una variabilidad excesiva (37,4%).

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes por grupo según intervalo en que se sitúa el rango de las cuatro estimaciones en el lanzamiento de 100 monedas

Rango de las cuatro estimaciones	Bachillerato (n=234)
Estimación normativa [6-15]	30,6
Estimación aceptable [3-20] ¹	15,2
Excesiva (>20)	37,4
Alta concentración (<3)	12,1
No completa	4,7

¹Fuera del intervalo normativo

Desde el diagrama de caja asociado al rango (Figura 4.b) se llega a la misma conclusión, donde se observa que el tercer cuartil toma un valor alejado al extremo superior en el que se localizarían el 95% de las respuestas. Además, el valor de la mediana se localiza entre los extremos superiores de los intervalos en los que deberían localizarse el 68% y 95% de las respuestas, normativas y aceptables, respectivamente. Por tanto, el diagrama de caja informa que la

mayoría de los estudiantes sobreestiman la variabilidad de la distribución.

En resumen, los estudiantes de bachillerato no alcanzan los niveles superiores de razonamiento sobre el muestreo descritos por Moreno y Vallecillos (2001) y presentan los mismos errores descritos por Méndez (1991), Serrano (1996) y Shaughnessy et al. (2004).

5. CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos muestran que la muestra de estudiantes presenta una comprensión adecuada de la proporción esperada, puesto que el valor medio obtenido es próximo al valor medio teórico. Sin embargo, el análisis de la variabilidad revela que la mitad de los estudiantes proporcionan muestras cuyo rango se sitúa en los extremos, mostrando una tendencia a sobreestimar la variabilidad. Los estudiantes no identifican la relación entre la variabilidad y el tamaño de la muestra, resultado que se obtiene en la investigación de Shaughnessy et al. (2004). Por tanto, los alumnos tienen una comprensión intuitiva de la ley de los grandes números insuficiente, ya que conceden una variabilidad muy grande sin tener en cuenta el tamaño de la muestra.

Estos resultados sugieren la necesidad de investigar en un proceso de enseñanza que contemple las dificultades identificadas enfocadas en tareas que contemplen la generación de muestras de una misma población, con el objetivo de analizar la variabilidad asociada al proceso de muestreo. En este caso, la simulación o applets pueden ayudar a los estudiantes a comprender las propiedades del muestreo.

AGRADECIMIENTOS

Ayuda *PID2019-105601GB-I00* financiada por MCIN/AEI/
10.13039/501100011033.

6. REFERENCIAS

BATANERO, C. (2019). Statistical sense in the information society. En K.O. Villalba, A. Adúriz, F. García y J. Lavonen (Eds.), *Proceeding of the Congreso Internacional Sobre Educación y Tecnología en Ciencias-CISETC* (pp. 28-38). CEUR-WS.

BURRILL, G. y BIEHLER, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICM/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

HARRADINE, A., BATANERO, C. y ROSSMAN, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 235-246):Springer.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

MEFP - Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022a). *Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

MEFP - Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022b). *Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

MEFP - Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022c). *Real Decreto 243/2022, de 5 de abril, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato*. Madrid: Autor.

MÉNDEZ, H. (1991). *Understanding the central limit theorem*. Tesis doctoral. Universidad de California. UMI 6369.

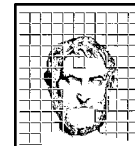
MORENO, A. y VALLECICOS, A. (2001). Exploratory study on inferential' concepts learning in secondary level in Spain. En M. van der Heuvel (Ed.), *Proceedings of the 25 th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)* (p. 343). Utrech: Freudenthal Institute and Utrecht University.

RUBIN, A., BRUCE, B. y TENNEY, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 314-319). Otago, Nueva Zelanda: International Statistical Institute.

SALDANHA. L. y THOMPSON, P. (2002) Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational Studies in Mathematics*, 51, 257-270.

SERRANO, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la en señanza de la probabilidad*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

SHAUGHNESSY, J.M., CIANCETTA, M. y CANADA, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Høines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the InternationalGroup for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.



TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1974): Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science*.185, 1124-1131.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P.Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.