HACER MATEMÁTICAS PARA APRENDER CON SENTIDO

Pablo Flores Martínez, *Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada*

RESUMEN

Los currículos actuales proponen que los alumnos aprendan las matemáticas con sentido, describiendo los sentidos matemáticos que deben desarrollar en cada etapa educativa. El aprendizaje matemático con sentido requiere que el alumno use las matemáticas para resolver situaciones que se le presenten, que amplíe el significado que le atribuye a los conceptos matemáticos y tenga criterios para apreciar la validez de los resultados obtenidos. Todo esto supone romper las expectativas del alumno que busca memorizar para aprobar, saber "qué poner", etc., es decir, evitar perversiones educativas de alumno. Para ello el profesor tiene que plantear tareas con sentido, que promuevan la construcción del conocimiento matemático. Por tanto, el profesor tiene que profundizar en su propia concepción del conocimiento matemático, disponiendo de relaciones más amplias entre los conceptos, es decir, tiene que "hacer matemáticas". En la conferencia concretaré la forma en que entiendo el concepto de sentido matemático, y pondré ejemplos de situaciones en las que he visto hacer matemáticas, he hecho matemáticas o he promovido que los alumnos las hagan.

1. INTRODUCCIÓN

Las evoluciones del currículo llaman la atención sobre la necesidad de realizar una enseñanza basada en el aprendizaje, que logre alumnos competentes para situaciones vitales.

Los profesores no podemos seguir manteniendo una enseñanza que responda a la extendida pregunta infantil "Maestro, ¿qué pongo aquí?", ni incorporar tan a menudo en nuestro discurso la justificación "es que no has puesto...". Rompamos con una enseñanza y aprendizaje basada el "Quéponguismos", planteando situaciones en las que los aprendices busquen herramientas, más que apliquen destrezas enseñadas en clase.

En esta conferencia promuevo una enseñanza que anime al alumno a "hacer matemáticas", a buscar los conceptos matemáticos que requiere para resolver situaciones, incluso las que encuentre en el curso de su vida.

Para desarrollar esta idea, comienzo por clarificar qué entiendo por aprender matemáticas con sentido y por hacer matemáticas. Posteriormente describiré situaciones en que he vivido el hacer matemáticas de los alumnos, completando con otras en las que "he hecho matemáticas", fruto haber profundizado en la complejidad de los conceptos matemáticos.

2. APRENDER MATEMÁTICAS CON SENTIDO Y HACER MATEMÁTICAS

Comenzamos clarificando estos términos.

2.1. APRENDER MATEMÁTICAS CON SENTIDO

La psicología cognitiva señala la disposición del ser humano a buscar sentido a las experiencias, para explicarlas y categorizarlas (Frank Smith, 2005). La cultura se convierte para Bruner (2009), en fuerza motriz de actividades intelectuales.

El diccionario de la Real Academia de la Lengua, seleccionando acepciones que se relacionan con educación, destacan tres significados: Entendimiento o razón, modo particular de entender algo, inteligencia o entendimiento para ejecutar (Real Academia Española, 2001). María Moliner (1997) añade: capacidad para entender y, particularmente, para juzgar o apreciar las cosas.

La educación matemática incorporó hace tiempo el concepto de sentido matemático, aplicado a diferentes bloques de contenido, para enfatizar un aprendizaje en el que se coordinaran diferentes componentes. Salvador Llinares (2001) resume una caracterización de aprender con sentido matemático como desarrollar maneras flexibles de pensar sobre el contenido para usarlo en diversos contextos, proporcionando elementos culturales que lo caracterizan.

Desarrollamos estas ideas con más detalle en el capítulo del libro publicado por la SEIEM, (Ruiz-Hidalgo y Flores, 2023), para expresar que aprender matemáticas con sentido, es identificar y comprender situaciones que necesitan matemáticas, poder avanzar o estimar un resultado o solución, emprender su resolución comprendiendo los instrumentos y herramientas matemáticas que emplea, disponiendo de varias formas de resolver y, apreciar la coherencia del resultado, sin necesidad de sanción externa.

2.2. HACER MATEMÁTICAS

Hay muy amplia literatura sobre qué es la matemática, pero no es fácil encontrar caracterizaciones de "hacer matemáticas".

Hablando de los avances matemáticos, Courant y Robbins (2006), indican que tienen raíces psicológicas en requerimientos más o menos prácticos (p. 17). Dou (1970), hablando del intuicionismo, que se basa en la construcción, señala la dificultad de dar una definición perfecta de lo que constituye esa construcción mental, ya que es irreducible a otros conceptos más primitivos.

Kuntzman (1969), trata de hacer una definición de la matemática por su método, reconociendo que esta caracterización es más estable, y como consecuencia señala que el matemático desarrolla teorías a partir de nociones fundamentales, planteadas a priori, apoyándose únicamente en el razonamiento lógico (op. cit., p 13).

Javier de Lorenzo, en el prólogo del libro de Poincaré (Poincaré, 2002), indica la preocupación de este autor por el "hacer matemático", afrontándolo desde la matemática y desde la filosofía. El propio Poincaré (2002) habla de creación matemática, y quizás por la duplicidad de puntos de partica que señala De Lorenzo, la caracteriza de una forma tan exigente, que va más allá de la creación de nuevos resultados de las teorías existentes, para iniciar nuevas teorías que permitan su progreso.

Hardy (1999) describe de manera más artística la actuación del matemático, señalando que su tarea es construir modelos, hechos de ideas, pero reclama que estos modelos deben ser hermosos. El requerimiento estético, le lleva a mirar de manera amplia los problemas fuente de los modelos, hablando de matemáticas triviales y no triviales.

Nuestro concepto de hacer matemáticas para lograr un aprendizaje con sentido no puede esperar alinearse en la exigencia filosófica de Poincaré, sino que tiene más que ver con la postura esteticista y "trivial" de Hardy.

De esta forma, vamos a caracterizar hacer matemáticas como: a) poner en juego razonamientos matemáticos para resolver situaciones que se presentan, b) profundizar sobre significado de conceptos matemáticos para apreciar sus cualidades, propiedades, alcance, etc. o c) indagar sobre manifestaciones matemáticas, objetos, etc.

Para concretar esta postura, ejemplifico con una situación familiar en que he apreciado a mi nieta Vera, de dos años y medio, "haciendo matemáticas". Vera a esa edad comenzaba el concepto de cantidad, pasando de apreciar diferencias entre un objeto y muchos, y posteriormente, un objeto, dos objetos y .. muchos. Su percepción de estas cantidades es por subitación. Si se le pregunta ¿cuántos hay?, comienza a relatar una secuencia numérica personal (uno, tres, catorce, tres, cinco, ...), mientras señala con el dedo objetos, sin respetar la correspondencia unívoca. Saber la cantidad no tenía que ver con contar. Le regalaron tres caramelos, y los guardaba celosamente, pero .., se perdió uno. Cuando descubrió lo que tenía, expresó: "*Me falta uno*". No emplea la subitación del tres de manera habitual, siempre dice "muchos" cuando son más de dos. Pero, en este caso, en que mezcla intereses personales realiza una captación de diferencias y lo enuncia mostrando diferencia de cantidades, y señalandola. Vera ha puesto en juego razonamientos matemáticos para quejarse de una situación que le es molesta, por lo que sirve como un ejemplo de hacer matemáticas.

3. TAREAS PARA QUE LOS ESTUDIANTEAS HAGAN MATEMÁTICAS

La propuesta de esta conferencia es apoyar que una forma de que los alumnos aprendan matemáticas con sentido es que hagan matemáticas en el sentido expresado anteriormente. Para desarrollar esta idea comienzo por relatar una situación que me sugirió la idea, una estudiante hizo matemáticas sin que fuera esta la intención de la tarea planteada. Posteriormente presentaré ejemplos de tareas que pueden ayudar a los estudiantes a hacer matemáticas.

3.1. LINA HACE MATEMÁTICAS

Nos situamos en un curso de posgrado, trabajando con licenciados recientes en matemáticas, preparándose para ser profesores de matemáticas de secundaria. Buscando que razonen de manera abierta y empleando situaciones estimuladoras (Flores, 2020), planteo el famoso problema del reparto de camello que aparece en diversos libros de matemática recreativa (*Un padre deja en* *herencia 11 camellos, la mitad para el hijo mayor, un cuarto para el segundo y un sexto para el tercero ¿Cuántos camellos corresponden a cada hijo?*). El problema se suele resolver "pidiendo prestado" un camello, para no llamar al carnicero, y poder hacer medios, cuartos y sextos, en este caso de 12 camellos, pero con la particularidad de que los lotes resultantes son de 6, 3 y 2, que dejan libre el camello pedido.

Esperábamos con este problema que estudiaran algunas condiciones que debe tener un "buen" reparto. Una estudiante, Lina Cecilia, no se quedó contenta con la solución propuesta, ni siquiera con el razonamiento que desacreditaba en reparto planteado ($\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$), la suma de las fracciones no da la unidad. Discutió con su hermano y pasaron a proponer nuevas soluciones, para lo que sugirieron realizar el reparto teóricamente de manera recursiva, es decir, repartiendo la cantidad inicial de acuerdo con las fracciones, calculando el resto que quedaba sin repartir, para continuar repartiéndolo con las mismas fracciones, siempre que quedara resto. Generan así una suma de progresiones geométricas decrecientes, de razón $\frac{1}{12}$, cuyo resultado coincide con el reparto realizado tomando un camello prestado: 6, 3 y 2, pero cubriendo el total de la cantidad a repartir. ¿Es más coherente este reparto con los deseos manifestados por el padre? ¿Qué problemáticas encierran los repartos? ¿Cómo se resuelven?

La actuación de Lina hizo que profundizáramos en el concepto de reparto, y convertimos el razonamiento en un artículo (Cecilia y Flores, 1996). La conclusión fue más interesante, los estudiantes pueden hacer matemáticas si se les crean las condiciones para ello, llegando a resultados originales que rompen con las matemáticas cerradas.

3.2. PROFUNDIZACIÓN EN SIGNIFICADO DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

La idea de que el profesor necesita mirar los conceptos matemáticos para comprender su significado, se refuerza con un constructo que ha sido fundamental en el grupo de investigación PNA, dirigido en su comienzo por Luis Rico. Arranca de una concepción curricular que se apoya en lo que Rico (1987a y b, 2013, y Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) llaman organizadores del currículo. Con estos organizadores se establece el Análisis Didáctico, estudio del significado del concepto en base a las dimensiones conceptual, cognitiva, social y ética que sustenta el currículo. Para llegar a captar estas dimensiones se realizan los análisis correspondientes (de contenido, para el conceptual, cognitivo, de instrucción, para el social, y de actuación, para el ético) (Figura 1).

Dos ejemplos mostraremos del efecto que ha causado el análisis didáctico en la profundización sobre conceptos matemáticos y la generación de tareas para que los estudiantes hagan matemáticas, la primera basada en la geometría, y la segunda en el concepto de magnitud.

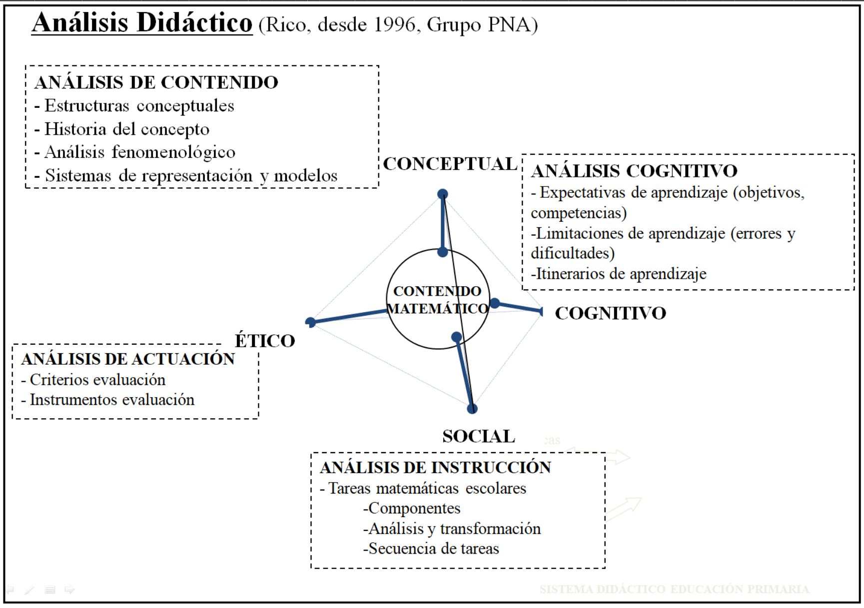


Figura 1. Análisis didáctico (Rico, desde 1996; .

3.2.1 Polígono con Tangram

En los textos de Alsina, Burgués y Fortuny (1987), se propone que la enseñanza de la geometría debería cubrir diversas actuaciones: Percibir e identificar, caracterizar, definir, construir y dibujar, clasificar, medir, encontrar propiedades y demostrar.

Generalmente la definición ocupa un papel importante en geometría, pero es fácil que los estudiantes las conciban solo como una frase a memorizar. En la tarea propuesta arrancamos por familiarizar a los estudiantes (de primer curso del Grado de Educación Primaria, Facultad de Educación, pero puede aplicarse en otros niveles educativos), con el Tangram. Entregamos uno a cada estudiante y pedimos construir el cuadrado, otros polígonos convexos fáciles, moviendo una o dos piezas (rectángulo, triángulo rectángulo isósceles, paralelogramo, trapecio isósceles). Una vez familiarizados, planteamos la tarea más compleja: "Construir el polígono de mayor número de lados empleando el TANGRAM".

Las experiencias realizadas tienen ciertas similitudes. Comienzan por formar polígonos convexos, que le son más familiares. Alguien coloca piezas uno de cuyos lados no coincide completamente y aprecia que aumenta el número de lados. No es extraño que pregunten si "eso vale", lo que da ocasión a formular, ¿es un polígono lo construido?. Suelen recordar el polígono como una secuencia cerrada de segmentos unidos, por lo que tienen que dar verosimilitud a la imagen trazando en un papel una secuencia de segmentos y contandolos, para apreciar la cantidad de lados. Algunos más arriesgados sugieren colocar piezas unidas por vértices y se preguntan si son polígonos. Cuando se quedan sin argumentos para aceptar o rechazar la propuesta, se les pide que busquen definiciones, actualmente mediante el teléfono móvil.

Para ejemplificar, muestro dos definiciones de diccionarios escolares:

Definición 1: <u>Polígono</u>: La unión de varios segmentos de modo que el extremo final de uno sea origen del siguiente, sin estar alineados dos consecutivos, se llama *línea poligonal*. Cuando el extremo del último segmento coincide con el origen del primero se tiene un *polígono* (trataremos sólo el caso en que los lados no consecutivos carezcan de punto común). También se llama polígono a la porción del plano encerrada por la línea poligonal.

Definición 2: Curvas: Hay curvas planas y espaciales. Las que no se intersecan se llaman curvas simples (figura 2).

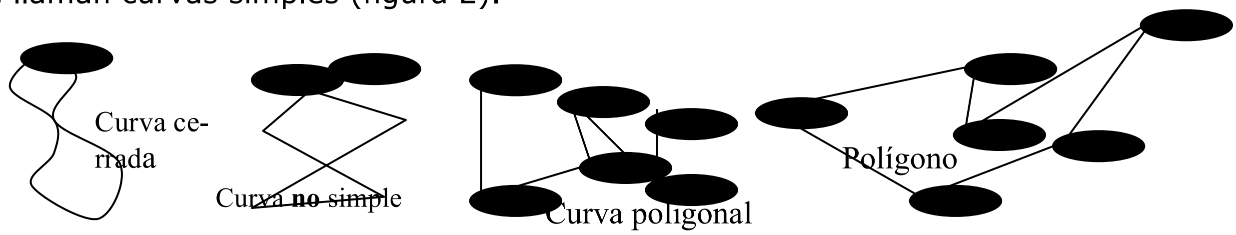


Figura 2. Ejemplos de curvas simples y no simples

Polígono: Una curva simple formada por segmentos unidos por sus extremos, se llama *curva poligonal*. Si es cerrada, se llama *polígono*.

Las definiciones consensuadas se convierten en referentes con los que debatir si se puede considerar polígono las figuras obtenidas. Se aprecian matices de las definiciones y se emprende un debate que lleva a los estudiantes a interpretarlas, convertir sus figuras en secuencias de segmentos, apreciar qué cantidad de segmentos aparecen, si hay algún vértice que pertenece a dos lados no consecutivos, etc. En caso de quedarnos con curvas simples, pasamos a encontrar la figura de mayor cantidad de lados, y, en último caso, demostrar que no puede tener más de 23 lados (lados de todas las piezas del Tangram).

La tarea presentada puede colaborar a que los estudiantes desarrollen su sentido espacial. Veámoslo empleando la caracterización del sentido espacial que concretamos (Flores, Ramírez-Uclés y Del Río, 2015).

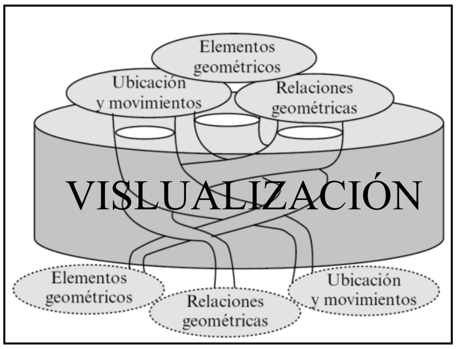


Figura 3. Componentes del sentido espacial (Flores, Ramírez-Uclés y Del Río, 2015, p. 134)

Los estudiantes comienzan desde su concepto de polígono, y las clases de polígonos, de manera intuitiva, para ir apreciando la diversidad de polígonos que pueden formar con el Tangram, la concepción de la figura formada por las piezas como una secuencia de segmentos, y el posible enriquecimiento evitando la coincidencia de lados completos, todo ello desde una perspectiva visualizadora materializada en el recurso. El contraste con sus dudas y con las definiciones le enriquece los elementos geométricos, incluso muestra la importancia de la ubicación de las piezas y su repercusión en el cambio de cantidad de lados, por lo que las dimensiones anteriores, que arrancan de la parte inferior del diagrama, se ven reforzados por la visualización y el papel que otorgan a la definición. Con ello desarrollan el sentido espacial.

3.2.2 Concepto de magnitud, medida y medida en unidad triángula

Al profundizar en el concepto de magnitud se aprecia la importancia de caracterizar la cualidad que llamamos magnitud, de la forma de medirla o de calcular su medida. El sentido de la medida recoge estas componentes, añadiéndole la dimensión de la estimación, que requiere de las otras dos (Moreno, Gil y Montoro, 2015, figura 4).

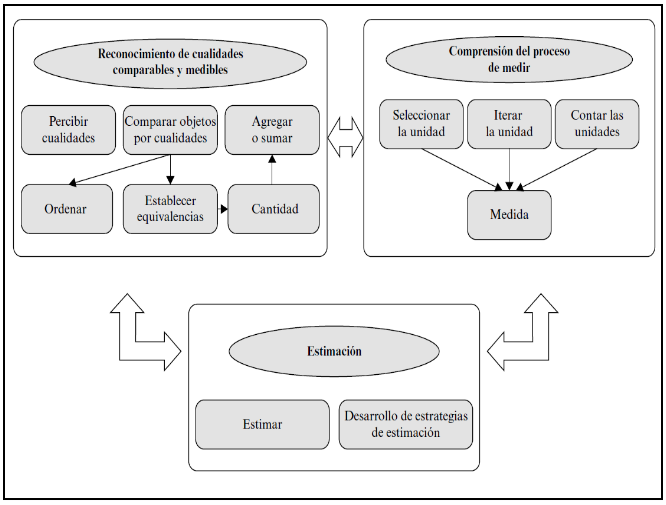


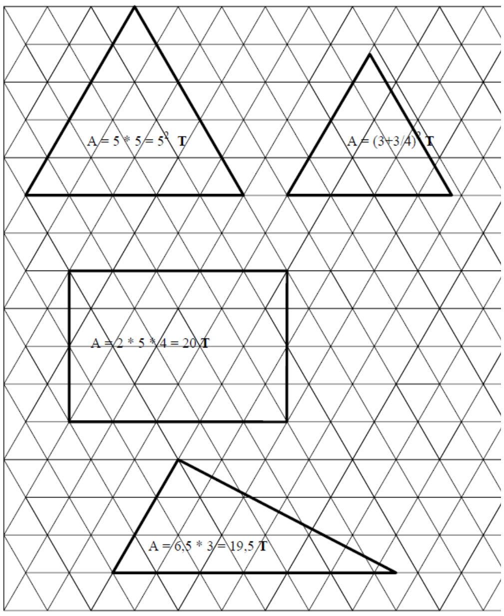
Figura 4. Componentes del sentido de la medida (Moreno, Gil y Montoro, 2015, p. 157)

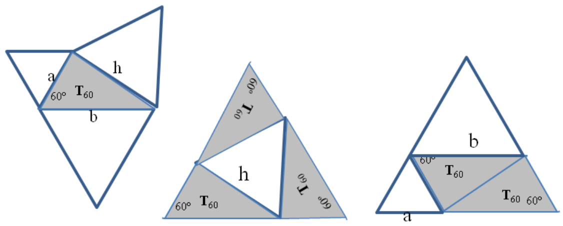
El tratamiento escolar de la superficie suele basarse en la medida indirecta, calculando la medida del área mediante operaciones con medidas de longitud. Profundizar sobre la clásica fórmula de cálculo de la medida del rectángulo nos llevó, junto a Isidoro Segovia y Enrique Castro (Segovia, Castro y Flores, 1997) a apreciar la complejidad de la misma, cuando las medidas de los lados eran irracionales, apreciando la importancia del axioma del continuo.

Haciendo matemáticas con longitudes de segmentos y áreas de rectángulos nos lleva a apreciar que es posible obtener un cuadrado de la misma superficie que cualquier rectángulo dado. Pero si las longitudes de los segmentos son *a* y *b*, el área es *a.b*. Y si el lado del cuadrado con la misma área que el rectángulo es x, resulta $a.b = x^2$. Con ello surge "el cuadrado de un segmento". ¿Tiene sentido hablar de la "raíz cuadrada de un segmento"?. En Flores (1999), describimos una paradoja aparente, que es la que muestra que el segmento que mide la raíz cuadrada de un segmento depende de la unidad, siendo mayor o menor que el segmento original, según sea menor o mayor que la unidad que tomemos. Explicar esta situación y profundizar en los elementos matemáticos que se ven implicados, lo propusimos en cursos de profesores de matemáticas, impartidos en Centros de Profesores andaluces.

La resolución de la aparente paradoja exige hacer matemáticas para apreciar y comprender la complementariedad y diferencia entre la magnitud (superficie), y su medida (área), y con ello la diferencia de operaciones que se establecen en el conjunto de cantidades de magnitud hasta convertirla en un semimódulo, de las que se establecen en el conjunto numérico sobre el que la proyecta la medida.

Pero también se puede hacer matemáticas jugando con las unidades de medida. Así lo hacemos en una tarea sugerida a profesores, en la guía Praxis (Flores, 2002), y más adelante, en otra encaminada a alumnos con talento, en los cursos Estalmat (Flores, 2017). En la figura 5 se recogen las fórmulas que aparecen para determinar la cantidad de triángulos equiláteros que caben en diversas figuras.





$3\text{Sup } T + \text{Sup } T_h = 2 \text{ Sup } T + \text{Sup } T_a + \text{Sup } T_b$

Teorema triángulo sesentángulo:
Superficie de triángulo equilátero sobre hipotenusa de triángulo sesentángulo (T_h), es suma de superficie de triángulos equiláteros sobre catetos, menos superficie de triángulo sesentángulo

Figura 5. Cálculo y fórmulas del área de polígonos con unidades triangulas

Figura 6: Teorema triángulo sesentángulo (Flores, 2017)

La tarea planteada en Flores (2017), arrancaba con la cuestión ¿Por qué se llama *cuadrado* a la segunda potencia de un número?. Las fórmulas de cálculo de áreas de polígonos regulares empleando como unidades de medida esos mismos polígonos (que deben rellenar el plano, naturalmente), muestra que el área es la *segunda potencia* de la longitud del lado.

Tomando el papel isométrico, y razonando sobre triángulos equiláteros, podemos llegar a considerar que el ángulo de sesenta cubre en este caso lo que el ángulo recto en la medida con cuadrados. Realizando un razonamiento de superposición similar al que se hace en una de las demostraciones clásicas del Teorema de Pitágoras, nos ha llevado al Teorema del Triángulo sensentángulo que se muestra en la figura 6.

El trabajo con estas tareas permite relacionar el concepto de magnitud con el concepto de medida, abordando tanto las características del semimódulo que genera la magnitud (en el caso de la tarea de la raíz cuadrada del segmento), como las relativas a la unidad seleccionada, dando mayor significado a las tan manidas fórmulas de cálculo indirecto de áreas a partir de longitudes. De esta forma se colabora a desarrollar el sentido de medida.

4. OTROS EJEMPLOS DE HACER MATEMÁTICAS

En los anteriores ejemplos hemos mostrado tareas que favorecen que los receptores (estudiantes de diversos grados o profesores en cursos de formación), hagan matemáticas. Pero para ello, el profesor tiene que hacer matemáticas. A continuación refiero ejemplos de hacer matemáticas que arrancan de un recurso didáctico-lúdico, La pirámide de Keops. Dado que estas experiencias están descritas en diversos artículos, me limitaré a relatar su contenido.

4.1. PIRÁMIDES RELLENAS DE PIRÁMIDES

El juego Pirámides de Keops lo conocí en unas jornadas de profesores en Huelva. Es un rompecabezas formado por varias piezas (figura 7), para formar una pirámide cuadrada.

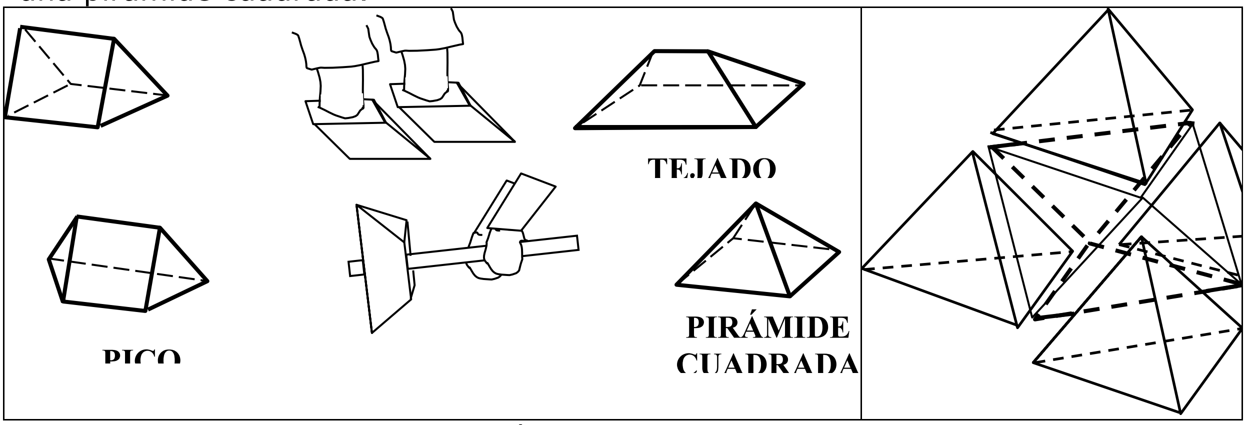


Figura 7: Pirámide de Keops (Flores, 2007)

La tarea propuesta en este artículo se ha empleado en cursos de Estalmat, y parte de preguntar si los tetraedros rellenan el espacio. En su desarrollo se procede a construir poliedros regulares y pirámides (medios octaedros) de distintas dimensiones con el puzle, para finalizar apreciando que todas las piezas se forman mediante la unión de tetraedros y pirámides cuadradas del mismo lado (Figura 7, apartado b).

Examinar algunas condiciones de figuras para rellenar el espacio, daba a esta profundización mayor peso para examinar la complementariedad del tetraedro y pirámide en uno de estos rellenos.

4.2. CONCEPTO DE VOLUMEN, RELACIÓN ENTRE TETRAEDRO Y PIRÁMIDE

El relleno del espacio está relacionado con la idea de volumen. Con María José González emprendimos un estudio del volumen (González y Flores, 2001), examinando las posibilidades de transformar poliedros para comparar su cantidad de volumen. Familiarizarnos con el Teorema de Dehn (*Un tetraedro regular y un cubo no son equicompuestos de manera finita*), y apreciar su diferencia con el Teroema de Boliay-Gerwien (*Dos polígonos tienen la misma superficie si y sólo sí, son equicompuestos, o sí, y sólo sí, son* equiadicionales), nos mostraba la diferencia existente entre las posibilidades de descomponer y recomponer polígonos y la imposibilidad para poliedros, lo que se resuelve mediante el Principio de Cavallieri, para obtener el volumen de pirámides.

Propusimos entonces una tarea para comparar volúmenes, centrándonos en el tetraedro regular y la pirámide cuadrada de la misma arista. Previamente habíamos comparado de diversas formas. El puzle Pirámide de Keops permitía comparar la cantidad de T_1 (tetraedros de arista unidad) y P_1 (pirámides cuadradas de misma arista), que se necesitan para construir T_2 y P_2 y T_3 y P_3, apreciando que es mayor la cantidad de piezas para P que para T. La comparación directa muestra más caras en P, el cuadrado con más superficie que cualquiera de T, pero la altura de T es mayor que la de P.

Pasamos a estudiar Tetraedros y Pirámides de bolas. Los primeros números Piramidales cuadrados (1, 5, 14, 30), son mayores que los correspondientes Tetraédricos (1, 4, 10, 20). Sus fórmulas permiten calcular límites.

Otra forma de comparar volúmenes consiste en insertar figuras, como apreciar un Tetraedro en un cubo. El cubo tiene 6 diagonales, seleccionando de manera que cada tres concurran en un vértice, aparece un tetraedro interior (Figura 8, Flores y Ramírez-Uclés, 2021).

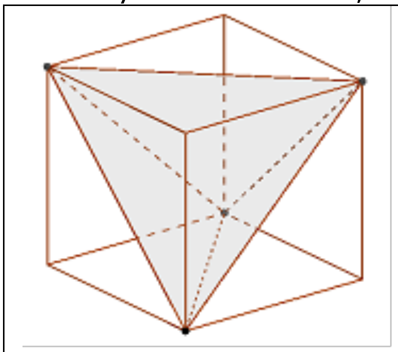
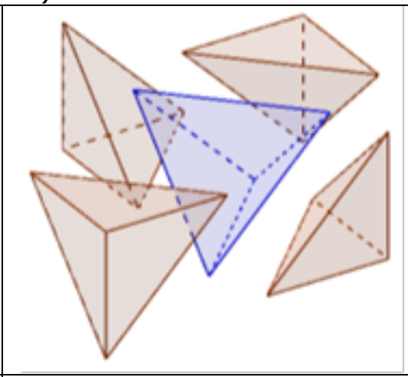
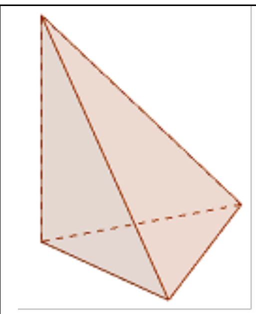
		

Figura 8a: Tetraedro de diagonales del cubo	Figura 8b: Tetraedro y pirámides complementarias en el cubo	Figura 8c: Triedro trirectángulo

Buscamos una forma de obtener el volumen de las piezas resultantes, y surgió una descomposición fractal del Triedro trirectángulo (uno de los tetraedros que complementan al tetraedro regular para obtener el cubo), mediante el truncamiento por un plano paralelo a una base triángulo rectángulo, girando el trozo superior sobre el inferior, para obtener reiteradamente cubos y nuevos Triedros trirectángulos de lados mitad. El triedro ase convierte en una serie infinita de cubos, que situados convenientemente, ocupan la tercera parte de la mitad del cubo original (Flores y Ramírez-Uclés, 2021). Empleamos estas tareas en estalmat, dando lugar a que los estudiantes hicieran matemáticas y desarrollaran su sentido espacial (Guerrero y Flores, 2015).

Posteriormente llevamos este truncamiento a cualquier tetraedro. Situando el tetraedro en la esquina de un prisma oblicuo de base el paralelogramo formado por el triángulo de la base del tetraedro y su simétrico respecto a un lado. Lo truncamos por un plano paralelo a dicha base, a distancia mitad de altura y hacemos una simetría de plano bisectriz del diedro principal de este tetraedro y lo giramos hasta hacerlo caer sobre el trapecio que ha quedado en la cara interior. Se forma así un prisma semejante al anterior de arista mitad, junto a dos tetraedros semejantes al original. Continuando el proceso de manera infinita obtenemos una serie de prismas que se pueden colocar formando una secuencia que ocupa un tercio de la mitad del prisma, por lo que su volumen es un sexto del prisma de base paralelogramo, o un tercio del prisma de base triangular (Flores y Rodríguez-Uclés, 2021). Rafael Ramírez relacionó esta resolución con el Tercer problema de Hilbert.

5. CONCLUSIONES

Como hemos apreciado, el profesor puede hacer matemáticas (triviales o no?), para crear tareas con las que estimular que los alumnos hagan matemáticas. Hemos mostrado tareas que promueven hacer matemáticas, y examinado cómo su realización favorece un aprendizaje con sentido, destacando la forma en que relacionan entre sí las componentes de diversos sentidos matemáticos.

Animamos a buscar formas de hacer matemáticas, que estimulen razonamientos matemáticos. Juegos, recursos, materiales, etc., son fuente de ocasiones de hacer matemáticas, especialmente si lo compartimos con los compañeros, en los diferentes ámbitos profesionales en que nos movemos.

He citado durante el texto compañeros con los que he compartido estos trabajos, para realzar el papel colegiado del empeño. La participación en las sociedades (Thales, SEIEM, FESPM, RSME, FISPM, etc.), ha permitido apreciar aportes de otros compañeros. Los materiales que he conocido a través de mis amigos del grupo Alkerke, los que ha producido con su natural maestría Luis Berenguer, los que ha ideado Rafael Ramírez, los que han ido aportando al seminario del Departamento de Didáctica de la Matemática todos los compañeros que han pasado por el mismo, etc., son una fuente importantísima de estímulos para hacer matemáticas. Ello ha colaborado a crear una colección particular de recursos que ... echan de menos la colaboración de mis amigos para organizarlos, de manera que ganen organización y uso.

"Somos lo que somos por los encuentros que hemos tenido", y para favorecer estos encuentros se requieren sociedades profesionales vivas, como lo que deseo que siga siendo la SAEM Thales.

6. REFERENCIAS

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis. Madrid.

BRUNER, J. (2009). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Alianza Editorial.

CECILIA, L.M. y FLORES, P. (1996). Papel pericial de las matemáticas. Los repartos. *SUMA* 21, 81-88.

CEMAT (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en educación no universitaria. Comité español de Matemáticas. https://fespm.es/wp-content/uploads/2021/06/Bases-Matematicas-CEMat-mayo-2021.pdf

COURANT, R. y ROBBINS, H. (2006). *¿Qué son las matemáticas*?. Fondo de Cultura Económica, México.

DOU, A. (1970). *Fundamentos de la matemática*. Labor, Barcelona.

FLORES, P. (1999). Paradojas matemáticas para la formación de profesores de matemáticas. *SUMA,* 31, 27-35.

FLORES, P. (2002). Superficie y área. *Guías Praxis para el profesorado de ESO. Matemáticas, Contenidos, Actividades y Recursos*. G.P.P. Junio, 2002.

FLORES, P. (2007). Pirámides rellenas de .. pirámides. Puzzles espaciales que favorecen la visualización. En Flores, P., Ruiz, F. y De la Fuente, M. (Coord.), *Geometría para el siglo XXI*. (pp. 223-247). Badajoz, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y SAEM THALES.

FLORES, P. (2017). *Superficie Triángula*. Ponencia en IX Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas. Granada.

FLORES, P. (2020). *El profesor de matemáticas, un animador* cognitivo. Conferencia XII Festival Internacional de Matemáticas, 2020, Costa Rica, 28/septiembre.

FLORES, P. & RAMÍREZ-UCLÉS, R. (2021). Note for the third Hilbert problem: a fractal construction. *The Mathematics Student*, Vol. 90, Nos. 3-4, July-December (2021).

FLORES, P., RAMÍREZ-UCLÉS, R., DEL RÍO, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127-145). Pirámide, Madrid.

GONZÁLEZ, M.J. y FLORES, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática* Vol.13 fasc.1. 94 - 106.

GUERRERO, S. y FLORES, P. (2015). Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear formulas. *Épsilon, Vol. 32*(2), nº 90, 21-31.

HARDY, G.H. (1999). *Apología de un matemático*. Nívola, Madrid.

KUNTZMANN, J. (1969). *¿Adónde va la matemática?* Siglo XXI, México.

LLINARES, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151-175). Síntesis. Madrid.

MOLINER, M. (1997). *Diccionario del uso del español*. Gredos, Madrid.

POINCARÉ, H. (2002). *Ciencia e hipótesis*. Austral. Madrid.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA DE LA LENGUA (2001). *Diccionario de la Lengua Española*, Vigésima segunda edición. Espasa Calpe, Madrid.

RICO, L. (1997a). *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Síntesis. Madrid

RICO, L. (1997b). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori. Barcelona.

RICO, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 33, 11-27.

RICO, L., LUPIÁÑEZ, J.L. y MOLINA, M. (Eds.).(2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e Innovación Curricular*. Comares. Granada

RUIZ-HIDALGO, J.F. y FLORES, P. (2022). Sentido matemático Escolar. En Blanco, L. et al., (Eds), *Aportaciones al desarrollo del Currículo desde la investigación en Educación Matemática*, (p. 55-80), SEIEM, Universidad de Granada, Granada.

SEGOVIA, I., CASTRO, E. y FLORES, P. (1996). El área del rectángulo. *UNO* 10, 63-77.

SMITH, F. (2005). *El muro de cristal. Por qué las matemáticas parecen tan difíciles*. Movimiento Cooperativo de Escuela Popular.