

MÉTODO ABN Y LOS CÁLCULOS MALDITOS

Jaime Martínez Montero, Inspector de Educación Jubilado

RESUMEN.

La ponencia se ocupa en mostrar cómo se trabajan con el método ABN contenidos matemáticos considerados difíciles o demasiado elevados para los alumnos de Primaria. Se repasan cinco de estos contenidos, de los cuales tres están directamente relacionados con el sistema de numeración y los otros dos con operaciones que, según el cálculo tradicional, presentan una alta complejidad.

INTRODUCCIÓN.

Siempre ha habido contenidos “malditos” en todas las etapas, y especialmente en el Área de Matemáticas (si no era considerada toda ella uno de estos contenidos). Con la palabra “malditos” se quieren designar a los contenidos que no se desean, que se temen, que se cree que no son adecuados para el nivel de los alumnos, o que no se conocen bien por parte del docente y que exigen una preparación específica y un esfuerzo añadido.

Para ser concretos y poder ajustarse a la duración de la ponencia, esta se ocupará de cinco contenidos: tres se derivan del conocimiento profundo del sistema de numeración: sucesiones, numeración en cualquier base y álgebra; dos se corresponden con operaciones aritméticas de toda la vida, como son la división por dos cifras y las raíces cuadradas.

2. SERIES NUMÉRICAS, SUCESIONES...

En los cursos superiores de Educación Primaria han sido muchos los docentes que, con el método ABN, han trabajado las series numéricas y las primeras sucesiones. Con ello se ayudaba a darle mayor sentido al sistema de numeración. ¿Por qué adelantar algo que se estudia posteriormente? Porque es muy sencillo establecer las diferencias que se dan entre los elementos de la cadena numérica y, a partir de ahí, establecer el valor central de un segmento de la cadena numérica y, por tanto, averiguar la suma de todos los números que la componen. Del mismo modo, es muy fácil también averiguar los números que componen ese segmento conociendo su suma.

2.1. Lo Que Se Ha Conseguído.

Además de conocer mejor el sistema de numeración y saber extraer del mismo nuevas consecuencias del uso de sus propiedades, se han descubierto aplicaciones muy interesantes que han permitido la extensión de los cálculos pensados, el descubrimiento y el uso de patrones, y, finalmente, la potenciación del nivel de abstracción de los alumnos, construyendo, a partir de los ejemplos, una de las fórmulas que permite averiguar la suma de los n primeros números.

2.1.1. La extensión de los cálculos.

Una vez averiguada la suma de los nueve primeros números (45), es muy sencillo averiguar cuál es la suma de las nueve primeras decenas, de las nueve primeras centenas, de las nueve primeras unidades de millar...

Alcanzados los anteriores cálculos, es fácil generalizarlos: por ejemplo, cuánto suman todos los números 30 (30, 31, 32, ..., 39), que será 345. También es fácil averiguar la suma de todos los 330, y de los 1330, y de los 880, etc. ¿Cuánto sumarán todos los 1440? Como son diez números, serían $10\ 000 + 4000 + 400 + 45 = 14\ 445$.

Etc.

2.1.2. Descubrimiento de patrones y explotación de los mismos.

Este apartado se acompaña de un vídeo en el que un alumno de 3º de Primaria muestra cómo calcula él la suma de los diez, cien y mil primeros números¹. Se muestran los resultados ordenados y, tras ello la generalización del mismo a más números:

SUCESIONES Y PATRONES. NÚMEROS PARES

SUMA DE LOS/N PRIMEROS NÚMEROS.	RESULTADO.
10	55
100	5050
1000	500 500

SUCESIONES Y PATRONES. NÚMEROS PARES

SUMA DE LOS/N PRIMEROS NÚMEROS.	RESULTADO.
0,01	0,055
0,1	0,55
1,0	5,5
10	55
100	5050
1000	500 500
10 000	5 005 000
100 000	5 000 050 000

¹ El alumno es Dani, del colegio "Engeba", de Valencia. Es de tercer curso de Primaria. Su maestro es Sergi Lerma. El vídeo es del curso 2019-2020. Su enlace es: <https://youtu.be/q9FfABdf9NQ>

2.1.3. Proceso de abstracción. Construcción de la fórmula.

Este apartado se acompaña de un vídeo en el que una alumna de 5º de Primaria deduce la fórmula para calcular la suma de cualesquiera N primeros números². Es muy explícito y no requiere de explicaciones añadidas. En un segundo vídeo un alumno de 6º de Primaria aplica la fórmula y calcula la suma de los 350 primeros números en pocos segundos³.

3. LA NUMERACIÓN EN CUALQUIER BASE.

El aprendizaje de la numeración en cualquier base ocupó un lugar en el currículum de la antigua EGB. Nunca se había trabajado antes y, tras ella, tampoco se volvió a trabajar en los niveles educativos que le sucedieron. ¿Por qué, entonces, volver al pasado? Se señalan cinco argumentos.

- Se trata de aprender el principio general del sistema de numeración, y no solo del decimal.
- No hay nuevas dificultades ni nuevas cargas cognitivas.
- Con bases distintas de diez tenemos referentes más pequeños o más grandes que nuestro sistema decimal.
- Con las bases mayores de diez los niños entienden algo muy difícil: la asignación de cifras a los diversos órdenes de magnitud cuando se supera el nueve.
- Para comprender las dificultades del sistema de numeración y el cálculo, las bases pequeñas nos permiten trabajarlas manipulativamente.

Para dar cuenta de cómo es el trabajo con este contenido de acuerdo con la metodología ABN, se muestran cuatro vídeos:

- En el primero de ellos se muestra a un grupo de alumnos de 2º de Primaria, que convierten en base decimal diversos números escritos en base dos⁴.
- En el segundo, un alumno de 6º de Primaria resuelve una resta en base seis con ayuda del ábaco plano⁵.
- En el tercero, un alumno de 5º de Primaria resuelve una resta en base nueve sin ningún tipo de apoyo⁶.
- En el cuarto, una alumna de 5º de Primaria resuelve una multiplicación por dos cifras en base cinco⁷.

² La niña es Laura, de 5º de Primaria. Alumna del C.P. "Carlos III", de Cádiz. Se grabó en el curso 2014-2015. La maestra era Eva Trujillo. Su enlace es: https://youtu.be/WChZZTYK_LM

³ El niño es Josechu, de 6º de Primaria. Alumno del C.P. "Andalucía", de Cádiz. Se grabó en el curso 2014-2015. La maestra era Rosario Ruiz. Su enlace es: <https://youtu.be/6HGfhaJ-Jts>

⁴ C.P. "Blasco Ibáñez", de Alzira (Valencia). Fue en el curso 2016-2017. La maestra era Rosa Piera. El enlace es: <https://youtu.be/Byu5tYk3ykl>

⁵ C.P. "Andalucía", de Cádiz. El alumno es Miguel. El vídeo se grabó en el curso 2014-2015. La maestra era Rosario Ruiz. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/CUCzFVif4wA>

⁶ C.P. "Andalucía". El alumno es Yoel. El vídeo se grabó en el curso 2012-2013. La maestra era Concha Sánchez. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/xl1WQOQjzNE>

4. LA INICIACIÓN AL ÁLGEBRA.

La iniciación al álgebra se puede hacer, en ABN, desde el conocimiento de la numeración y el dominio de las composiciones y descomposiciones y del cálculo mental. Para la introducción de los polinomios se parte de la descomposición de un número en su cuarto nivel:

NÚMERO A DESCOMPONER: 6158	
Primer nivel:	$6000 + 100 + 50 + 8$
Segundo nivel:	$(6 \times 1000) + (1 \times 100) + (5 \times 10) + (8 \times 1)$.
Tercer nivel:	$(6 \times 10^3) + (1 \times 10^2) + (5 \times 10) + 8$.
Cuarto nivel:	$(6 \times x^3) + (1 \times x^2) + (5 \times x) + 8$.

En el cuarto nivel queda un polinomio ordenado en x : $6x^3 + x^2 + 5x + 8$.

Es verdad que, en este caso, la indeterminada se conoce, pero más adelante se trata ya como desconocida. Como los alumnos saben descomponer muy bien los números (en este caso el 6158), una simple descomposición es un punto de partida para iniciarlos en la suma y resta de polinomios. También el producto y la división de polinomios por o entre un monomio lo resuelven muy bien, puesto que lo único que tienen que saber es:

- Operar monomio a monomio.
- Multiplicar (o dividir) sus signos.
- Multiplicar o dividir sus coeficientes.
- Multiplicar o dividir potencias de la misma base.

Se acompaña la exposición con dos vídeos. En el primero de ellos⁸ se recoge la resolución del producto $(3x^3+2x^2-4x-3) \times 6x$. En el segundo⁹ se recoge la resolución de la siguiente división: $(30x^6-25x^5-20x^4+5x^3) : 5x^3$

5. LA OPERACIÓN DE DIVIDIR CON EL DIVISOR CON DOS CIFRAS.

La popularmente llamada "división por dos cifras" no pasa por su mejor momento, y son muchas las voces que abogan, directamente, por eliminarla del currículum. Se piensa que la complejidad de su aprendizaje no compensa lo que la misma aporta, y que se puede resolver la misma, en los casos necesarios, con la calculadora.

En ABN se mantiene una posición contraria, apoyada en las siguientes razones:

- El pronunciamiento contra la división por dos cifras se hace sobre la base de que ésta solo se puede hacer de una manera: la de toda la vida. Y si se redujera la complejidad de la misma, ¿también habría que suprimirla?

⁷ C.P. "Andalucía". La alumna es Alicia. El vídeo se grabó en el curso 2012-2013. La maestra era Concha Sánchez. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/lxGx94Schz0>

⁸ C.P. "Carlos III" de Cádiz. El niño es Cristian. Es alumno de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2015-2016. La maestra fue Eva Trujillo. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/-Q-a-xPpnOg>

⁹ C.P. "Alba de Plata", de Cáceres. La niña es Paula. Es alumna de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2017-2018. El maestro fue Juan Antonio Durán. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/uc7lKHqGAXk>

- El pronunciamiento contra la división por dos cifras se hace sobre la base de que la transición de la de una cifra a dos no se puede hacer mejor de cómo se hace. Desde ABN se ha demostrado que tal afirmación no es cierta.
- Si se elimina la división por dos cifras, se debe eliminar también el producto por dos cifras.
- Se han de eliminar todas las divisiones con decimales en el divisor.
- El hecho de que los modelos didácticos que emplean los nuevos métodos se adapten muy mal a la división por dos cifras no debe querer decir que este tipo de división haya que eliminarla. Más bien habría que cambiar los modelos.
- Se perdería la necesidad de crear referentes cuando se manejen números muy grandes.

Se aportan tres vídeos que ejemplifican el nuevo algoritmo. Su contenido es el siguiente:

- El primero de los vídeos¹⁰ muestra cómo se resuelve una división por dos cifras con ayuda de la escala y la irrelevancia de una de sus dificultades clásicas: el "cero al cociente".
- El segundo de ellos¹¹ muestra las posibilidades del cálculo mental y del conocimiento de la numeración y de los productos para la resolución de divisiones.
- En el tercero¹² se muestra la que en ABN se llama "división posicional". Se aborda en los dos últimos cursos de Primaria y supone una gran simplificación del algoritmo.

6. LA RAÍZ CUADRADA.

No hay que gastar excesivas palabras para explicar que la resolución de raíces cuadradas se ha convertido, desde hace muchos años, en un contenido realmente maldito, temido, odiado. Desterrado de la Primaria, queda un tratamiento light en el último curso de esta Etapa, en el que se identifica la raíz cuadrada con el producto de un número consigo mismo. Así, la raíz cuadrada de 81 es 9 porque 9×9 es igual a 81. Sin embargo, la raíz cuadrada de 63 no es ni 9 ni 7, pese a que el producto de estos números sea igual a 63.

En ABN se estima que el aprendizaje de la resolución de la raíz cuadrada de, al menos, radicandos de cuatro cifras, es conveniente. Los argumentos son:

¹⁰ C.P. "San Rafael", de Cádiz. La niña es Laura. Es alumna de 4º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2013-2014. El maestro era Francisco Gamero. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/Ua92R91z398>

¹¹ C.P. "San Rafael", de Cádiz. El niño es Isaiah. Es alumno de 4º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2013-2014. El maestro era Francisco Gamero. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/NWoGZqr8rDs>

¹² C.P. "Carlos III" de Cádiz. El niño es Juan. Es alumno de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2015-2016. La maestra fue Eva Trujillo. El enlace del vídeo es: https://youtu.be/Udb-C_oWulk

- Por ser la inversa del cuadrado de un número. La mejor comprensión de los cuadrados se produce cuando se resuelve una raíz. No tiene sentido que sí se tenga que calcular el cuadrado de un número, pero no se pueda hacer la operación inversa.
- La resolución de raíces cuadradas supone alcanzar un grado de abstracción que engloba, en una misma estructura, raíz, cuadrados, producto, división, suma y resta.
- La resolución de raíces cuadradas es el puente que permite pasar desde la resolución manual de la misma hasta los procedimientos algebraicos.
- Por un sentido práctico, puesto que la raíz cuadrada aparece muy frecuentemente: geometría, estadística, ecuaciones de segundo grado o bicuadradas, etc.
- La resolución de la raíz cuadrada facilita la creación de marcos de referencia y la capacidad de estimación dentro de ese marco, como herramienta ante una situación desconocida.
- La resolución de las raíces cuadradas amplía notablemente el campo de resolución de problemas.
- La resolución de raíces cuadradas mejora la formación intelectual y el pensamiento formal, supone un marco muy adecuado para el desarrollo y la ejercitación del cálculo mental y, además, se constituye como un aprendizaje valioso, que es muy difícil adquirir por uno mismo.

Para conseguir lo que se acaba de enunciar en ABN se ha cambiado por completo el método tradicional para la resolución de raíces cuadradas. Ese cambio de método ha propiciado que los alumnos aprendan con facilidad el nuevo concepto y hasta presuman del mismo. Como ilustración, se han incluido cuatro vídeos. Su contenido es el que sigue:

- Vídeos 1^{13} y 2^{14} . Grupos de alumnos resuelven, de forma casi instantánea, raíces cuadradas exactas de radicandos de cuatro cifras.
- Vídeo 3^{15} . Un alumno de 6º resuelve la raíz cuadrada inexacta de 8328, mientras explica cómo lo hace.
- Vídeo 4^{16} . Otro alumno de 6º plantea el problema y resuelve la raíz inexacta que es la solución. Todo ello lo realiza en un tiempo inferior al minuto y medio.

En lo que hace referencia a la resolución de problemas, se incluyó en la ponencia la fotografía de una de las páginas del cuaderno de un alumno. Fue tomada en el curso 2017-2018:

¹³ C.P. "Andalucía", de Cádiz. Son alumnos de 5º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2014-2015. La maestra era Concha Sánchez. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/sb7kehHu-mg>

¹⁴ C.P. "Alba de Plata", de Cáceres. Son alumnos de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2017-2018. El maestro fue Juan Antonio Durán. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/T0UT7lhkv1A>

¹⁵ C.P. "Alba de Plata", de Cáceres. El niño es Cristian, de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2017-2018. El maestro fue Juan Antonio Durán. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/XD6OCa-5wIY>

¹⁶ C.P. "Alba de Plata", de Cáceres. El niño es Guillermo, de 6º de Primaria. El vídeo se grabó en el curso 2017-2018. El maestro fue Juan Antonio Durán. El enlace del vídeo es: <https://youtu.be/ZEeV8tkpMLI>

Parte C (Recordar, comprender, analizar, aplicar y crear)

1.- Tengo una parcela cuadrada de 5 184 metros cuadrados. ¿Cuánto mide cada lado?

Datos: La parcela
tiene 5184 m²

Operación

Raíz	Cuadrado	Resto
70	4900	284
+ 1	141	143
+ 1	143	0

Solución: Cada lado mide 72 metros

Quiero vallar el perímetro. El metro de valla me cuesta 18€. ¿Cuánto me cuesta vallarlo?

Datos: El metro de
valla me cuesta 18€

Operación

$$72 \times 4 = 288$$

$$288 \times 18 = 5184$$

Solución: Vallarlo me cuesta 5184€

En la parcela quiero plantar 2/9 de naranjos; 3/9 de limones; y 4/9 de manzanos. ¿Qué superficie en metros² plantaré de cada árbol frutal?

Datos: Quiero plantar
2/9 de naranjos; 3/9 de
limones; y 4/9 de manzanos.

Operación

$$\frac{4}{9} \text{ de } 5184 = 2304$$

$$\frac{2}{9} \text{ de } 5184 = 1152$$

$$\frac{3}{9} \text{ de } 5184 = 1728$$

Solución: De naranjos plantaré 1152 m²; de limones 1728 m²
y de manzanas 2304 m²

Observaciones

MATEMÁTICAS 5º PRIMARIA.
CEIP "HUERTA RETIRO" MAIRENA DEL ALCOR- SEVILLA

BIBLIOGRAFÍA.

Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, J. (2020). Enseñar matemáticas con el método ABN en 4º, 5º y 6º y preparación para la ESO. Madrid: Wolters Kluwer.
Martínez Montero, J., y Sánchez Cortés, J. (2021). ¿Por qué los escolares fracasan en matemáticas? Madrid: Wolters Kluwer.

En los dos libros citados se tratan los contenidos trabajados en la ponencia, así como referencias bibliográficas, enlaces a canales de youtube, páginas web y blogs, etc.