SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

# TÍTULO: MÉTODO DE LILL DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES POLINÓMICAS.

**Autor: Florentino Damián Aranda Ballesteros**, *IPEP, Córdoba.*

## 1. RESUMEN

**Eduard Lill (1830–1900)** ideó un método geométrico de resolución de las ecuaciones algebraicas. Veremos la justificación geométrica de su método para el caso de la ecuación cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Supongamos una secuencia de signos en los coeficientes de la misma y observaremos que la orientación (horaria/anti horaria) de la poligonal $O-A-B-C-D$, sigue una cierta cadencia. El camino $O(0,0)-A(a,0)-B(a,b)-C(a-c,b)-D(a-c,b-d)$, sigue en todo momento la que marca el signo (-/+) del producto de los dos coeficientes correlativos que van apareciendo en la ecuación $a;ab;bc;cd;$ A partir de aquí, veremos cómo ciertas trayectorias ortogonales sobre este primer camino desembocan en la resolución de la ecuación dada.

**Nivel educativo**:
Secundaria (Segunda Etapa) y Bachillerato.
**Bloque temático**:
B5. Rutas alternativas. Otras.

## 2. INTRODUCCIÓN

El texto siguiente es ficticio y sólo debe servir de ejemplo en la forma de redacción.

Sean $a,b,c,d>0$ , y ya que al menos hay una raíz real x, esta deberá ser entonces $x<0$. Por tanto, $ax<0 \rightarrow b+ax<b \rightarrow \tan\alpha=\frac{-ax}{a}=-x;-\tan\alpha=x$. Ahora bien, en los siguientes triángulos rectángulos, semejantes todos entre sí, por la propia construcción que se sigue, tenemos que:

$$-\tan\alpha=x=\frac{bx+ax^2}{b+ax}=\frac{-d}{c+bx+ax^2} \rightarrow x=\frac{-d}{c+bx+ax^2}$$

Y por tanto se verifica que $ax^3+bx^2+cx+d=0$. (Ver Figuras 1 y 2).

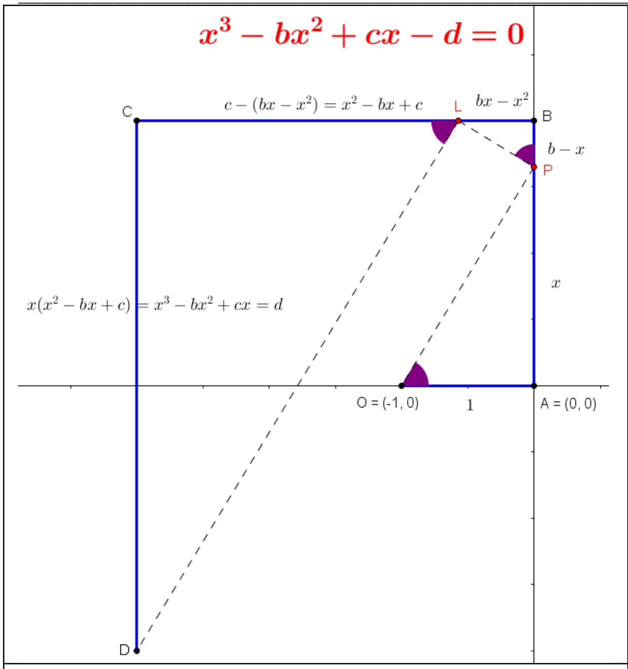



Figura 1

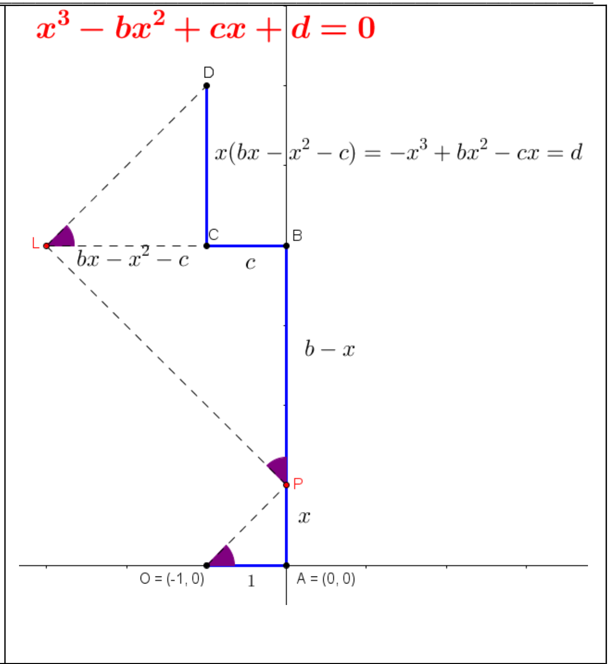



Figura 2

**Thomas Carlyle** (1795–1881) determinó sobre un círculo (Figura 3), en el plano de coordenadas la solución de una ecuación cuadrática del tipo $x^2 - sx + p = 0$.

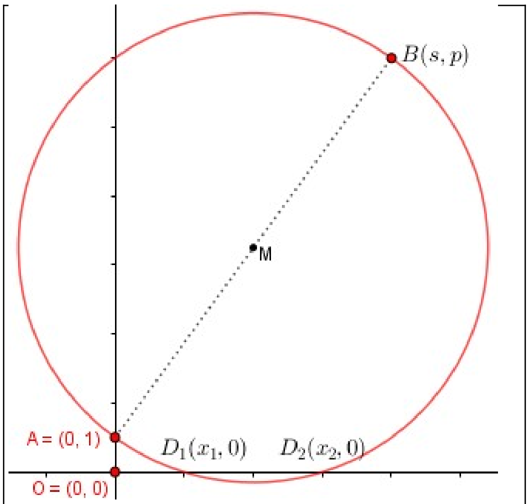
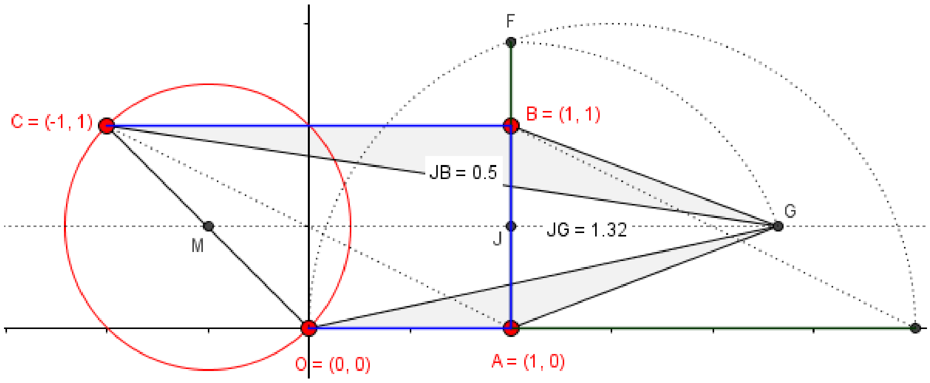



Figura 3

Se basaba en que las soluciones de la ecuación cuadrática eran las abscisas, coordenadas de las intersecciones del círculo con el eje horizontal. Los círculos de Carlyle se han utilizado después para desarrollar construcciones de regla y compás de polígonos regulares como el heptadecágono.

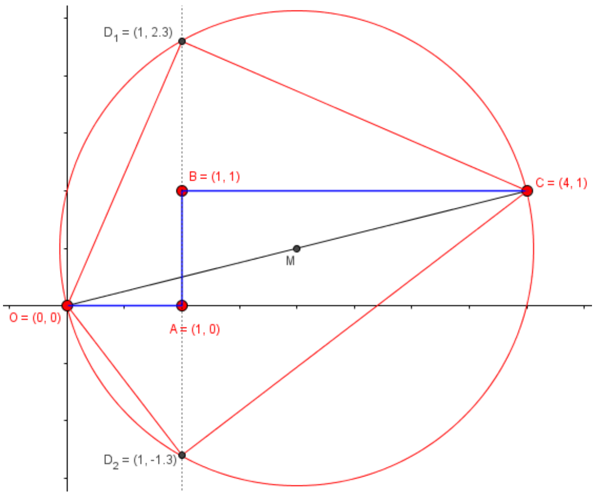
Pues bien, conjugaremos a continuación ambos métodos y podremos resolver la ecuación $a\,x^2 + bx + c = 0$, por ambos métodos, incluyendo la posibilidad en la que las raíces sean imaginarias. Para ello, sean estos ejemplos (Figura 4), que pretenden agotar la casuística sobre una ecuación cuadrática completa.

$$x^2+x+2=0 \rightarrow Dos\,raíces\,imaginarias. \rightarrow \{x_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i, x_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\}$$



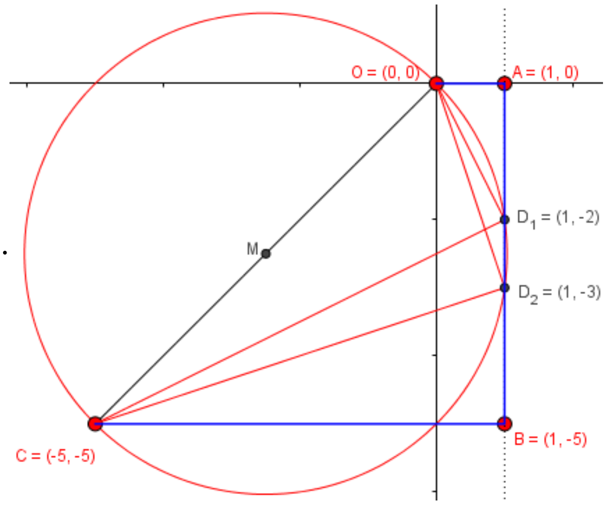

$$AG^2=AF^2=OA\cdot CB \rightarrow \Delta CBG \quad \Delta GAO \rightarrow \{x_1=-JB+JG\cdot i, x_2=-JB-JG\cdot i\}$$

$$x^2+x-3=0 \rightarrow Dos\,raíces\,reales\,de\,distinto\,signo. \rightarrow \{x_1=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}, x_2=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\}$$



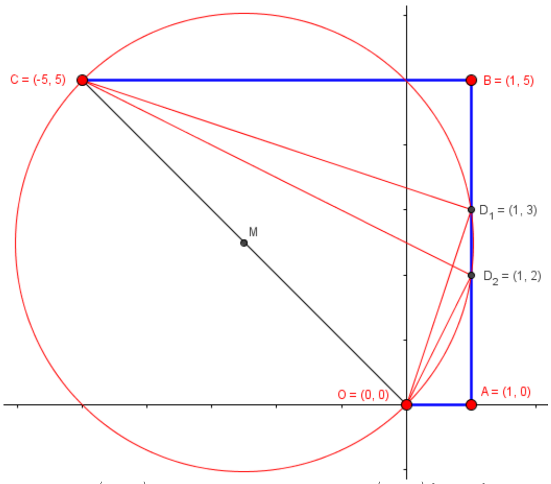

$$\rightarrow \{x_1=-Ordenada(D_1), x_2=-Ordenada(D_2)\}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow$ *Dos raíces reales positivas.*




$$\rightarrow \{x_1 = -Ordenada(D_1), x_2 = -Ordenada(D_2)\} \rightarrow \{x_1 = 2, x_2 = 3\}$$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow$ *Dos raíces reales negativas.*




$$\rightarrow \{x_1 = -Ordenada(D_1), x_2 = -Ordenada(D_2)\} \rightarrow \{x_1 = -3, x_2 = -2\}$$

Figura 4

# 3. RECURSOS

1.- Aula provista de cañón y micrófono, para tener buen audio y visualizar a través del portátil las construcciones a realizar con GeoGebra.

2.- Aula con Wifi abierto, para poder abrir DRIVE y demás archivos en GeoGebra Recursos.
3.- Aula con ordenadores para que el alumnado participante en el taller pueda seguir y realizar al mismo tiempo las construcciones requeridas.

# 4. REFERENCIAS

BRADFORD, P.V. *Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths***.**

HULL T. C. (2011). *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill.* American Mathematical Monthly.

Lill, M. E. (1867). *Résolution graphique des équations numériques de tous degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but. Nouvelles Annales de Mathématiques.*