

CONVERSACIONES ... IRRACIONALES

Enric Castellà Carlos, CREAMAT-CESIRE, Barcelona
Sílvia Margelí Völp, CREAMAT-CESIRE, Barcelona

RESUMEN

En este taller se presenta un material manipulativo poco conocido en nuestras escuelas e institutos para descubrir los números irracionales. Se encuentran en el mercado como GeoSticks o Anglegs, según la marca comercial, pero nosotros los hemos denominado GeoPalos. El taller simulará el procedimiento seguido en el aula con los alumnos, siguiendo el ciclo de experimentación propuesto por Anton Aubanell: "Experimentar, Descubrir, Conceptualizar y Formalizar, si es necesario".

El taller propone 4 tipos de conversación:

- La **conversación individual con el material**
- La **conversación entre iguales** (en este caso entre profesores) para descubrir propiedades
- La **conversación del docente con los alumnos para acompañarlo** poniendo palabras a sus ideas y razonamientos.
- Y, finalmente, la de aprender a **conducir una conversación con el alumnado planteando nuevos retos y buenas preguntas** para animarlo a seguir descubriendo.

El material es muy polivalente, y en esta ocasión nos centraremos solamente en la relación entre las medidas de los GeoPalos, que nos acerca a la idea de números irracionales. Utilizaremos GeoGebra para representar digitalmente, y descubriremos curiosidades como la relación del material con el DIN-A4, aproximaciones de números irracionales con números racionales, y otras pequeñas aplicaciones como el teorema de Pitágoras, los productos notables y la construcción de un tangram.

Nivel educativo: Secundaria y bachillerato

1. INTRODUCCIÓN

El taller pretende ser una reproducción de cómo plantearíamos la actividad en clase, pero en un tiempo comprimido.

Presentamos el material y pedimos que las personas participantes que se organicen en grupos de 4. Repartimos roles para cada persona del grupo:

- **Portavoz:** Explicará a los demás lo que se ha debatido en el grupo

- **Apuntadora:** Resumirá las ideas que hayan surgido
- **Moderadora:** Procurará que todas las personas del grupo se expresen, y que cada una tenga tiempo para hacer descubrimientos por ella misma
- **Cuestionadora:** Procurará generar preguntas (para aclarar ideas o para ir más allá) respecto lo que se vaya haciendo en el grupo.

2. INTRODUCIMOS EL MATERIAL

Repartimos un paquete de Geopalos a cada grupo y pedimos que busquen algún tipo de relación entre los GeoPalos. De entrada nadie sabe nada acerca de las medidas, pero tienen unos puntos de conexión que permite enlazar diferentes GeoPalos.

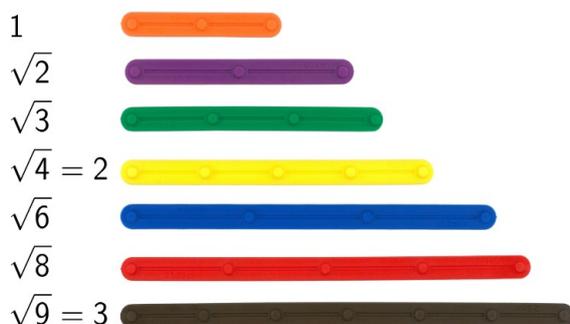


Figura 1. GeoPalos

Pedimos a los participantes que escriban algunas preguntas que les sugiere el material, primero de forma individual (1min) para después compartirlo en el grupo (3min). Una vez han consensuado las preguntas a plantear, las compartimos con el gran grupo.

Aquí aparecen diferentes opciones en las que poder trabajar y seguir investigando. Pero nosotros nos centraremos, de momento, en las medidas.

2.1. MEDIDAS

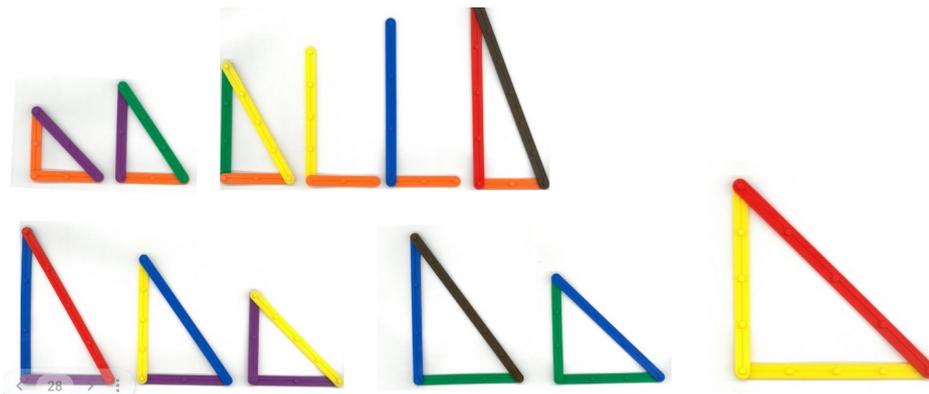
Nos preguntamos que podemos saber sobre las medidas y por eso pedimos que investiguen y comparen el material para descubrir que medidas y relaciones encuentran. A simple vista se ve que entre algunos que son el doble o el triple de otros.

Después les pedimos que concretamente busquen la relación entre el geopalo naranja y el lila.



Y vemos que justamente uno es la diagonal del cuadrado que podemos formar usando como lado el otro. Por eso la relación entre el lila y el naranja es de raíz cuadrada de 2. Les proponemos buscar ahora qué otros casos hay en que un GeoPalo sera la diagonal de un rectángulo construido con otros GeoPalos.

Buscamos entre todos una estrategia para comprobar que realmente sea un ángulo recto, y experimentamos para buscar todas las posibilidades.



2.2. APLET DE GEOGEBRA

Mostramos un applet de GeoGebra creado para presentar y usar los GeoPalos, para de esta forma poder trabajar con la pizarra digital, desde casa o si no tenemos suficiente material para todos.

<https://www.geogebra.org/classic/fxkks8km>



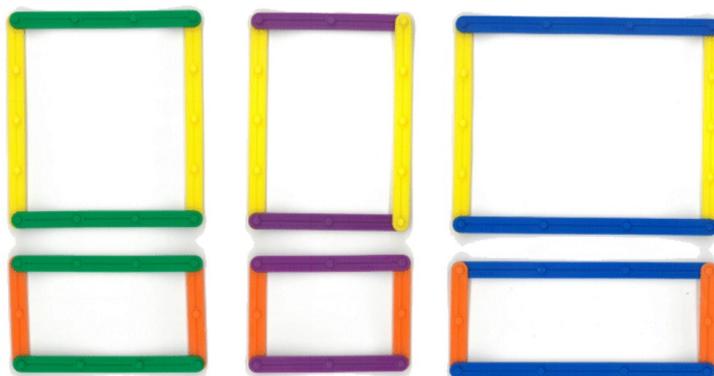
Con GeoGebra podemos crear las figuras que necesitamos con GeoPalos, y podemos incluir álgebra. Por ejemplo podemos dibujar la función $y=5\sqrt{x}$ y ver que todos los GeoPalos pasan a través de esta función.

3. DOBLE ÁREA

Nos planteamos una nueva cuestión: nos preguntamos si podemos construir parejas de rectángulos de manera que uno tenga el doble de superficie que el

otro. Dejaremos un tiempo para que hagan una búsqueda y comenten sus propuestas.

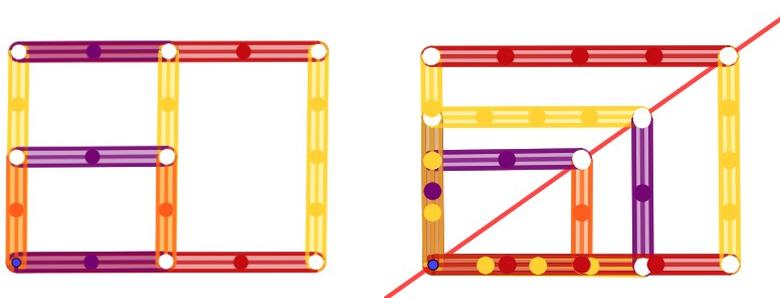
Aparecen diferentes opciones como dejar dos lados iguales y usar el doble de los otros. Para esto será necesaria una búsqueda exhaustiva de forma ordenada, utilizando algún patrón para no dejarnos ninguna solución por el camino.



Observamos que hay algún tipo de rectángulos que son semejantes, y proponemos el reto de buscar rectángulos semejantes en los que además uno doble el área del otro. Además, necesitamos saber como demostramos que realmente sean semejantes, y después de debatir proponemos las siguientes imágenes:

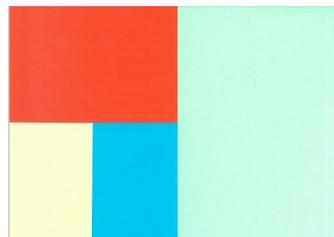
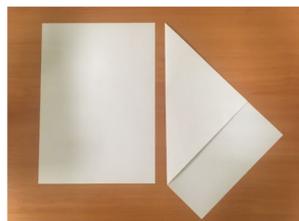
Ahora conectamos lo que acabamos de descubrir con los DINA-4, que justamente cumplen esta relación. Los lados crecen en razón $\sqrt{2}$ y el área lo hace en razón $(\sqrt{2})^2=2$

Para comprobarlo vamos doblando y cortando DINA-4 a mitades y da la casualidad que casi coincide con la medida de los GeoPalos.

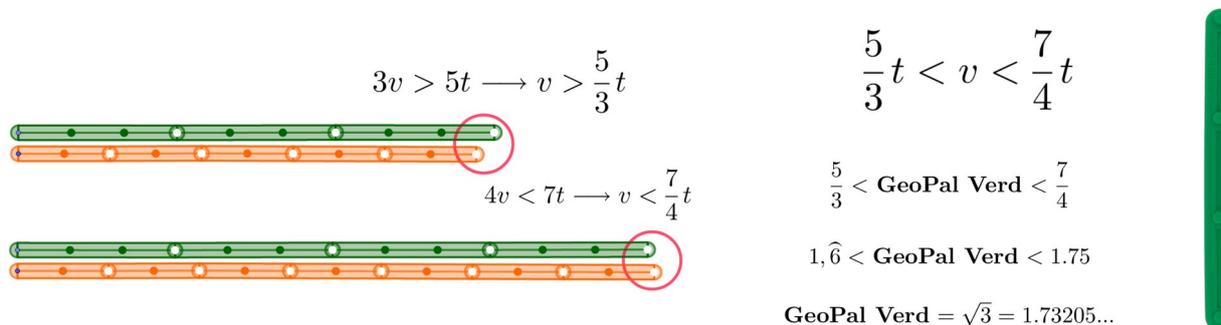


4. APROXIMACIÓN DE IRRACIONALES

En este apartado lo que proponemos es buscar la proporción de unos GeoPalos respecto a otros, para de esta forma buscar una aproximación con números racionales de números irracionales de forma manipulativa. Por ejemplo si buscamos la relación entre el GeoPalo naranja y el verde, y siempre después de dejar unos minutos para los participantes en el taller experimenten, encontramos esta relación:



De esta forma podemos aproximar diferentes números irracionales por exceso y por defecto.



5. OTRAS INVESTIGACIONES

Como ya se puede intuir, el material da para mucho. Nos permite plantear otras muchas investigaciones. A modo de ejemplo, comentaremos el Teorema de Pitágoras, la Cuadratura del rectángulo, Productos notables como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ i el Tangram.

REFERENCIAS

Campanya Laboratori de Matemàtiques del CREAMAT, Departament Educació de la Generalitat de Catalunya, CREAMAT, Barcelona, 2019, <http://ja.cat/LabMat>

Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria a l'Educació Secundària Obligatoria, Quaderns d'avaluació nº 31, Anton Aubanell, 2015, [Enlace](#)

Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria, Cecilia Calvo, Jordi Deulofeu, Joan Jareño y Laura Morera, Editorial Síntesis, 2016