MAMBO: MATEMÁTICAS CON POMPAS Y GEOGEBRA

Enric Castellà Carlos, *CESIRE, Barcelona*
Sílvia Margelí Völp, *CESIRE, Barcelona*

RESUMEN

Utilizamos las propiedades de las pompas de jabón para calcular superficies mínimas y representarlo con GeoGebra. Las pompas serán el contexto y el elemento motivador a partir del cual aprender matemáticas. Se plantea el problema de la construcción de una carretera de recorrido mínimo para conectar 3 poblaciones, que hará aparecer el punto de Fermat. Se resuelve con jabón, y se representa posteriormente en GeoGebra. Se repite el experimento para 4 ciudades y se discuten las posibles soluciones, incidiendo en la aparición en todos los casos del ángulo 120º. A partir de 5 puntos se observa que es un problema abierto.

En una segunda parte del taller trabajaremos en 3 dimensiones con el mismo esquema: conjeturaremos la pompa resultante al construir un poliedro dentro del jabón, para luego estudiar el porqué la pompa resultante es mínima y representarla en GeoGebra 3D. Utilizaremos gafas 3D y estudiaremos el caso del tetraedro y el cubo. Finalmente, probaremos con otros poliedros.

Nivel educativo: Secundaria y bachillerato

1. INTRODUCCIÓN

Las pompas de jabón buscan siempre las superficies mínimas y es por este motivo que las pompas son esferas: porque es la forma que para conseguir el mismo volumen utiliza la mínima superficie para cubrirlo. Vamos a utilizar estas propiedades usando una mezcla de agua, jabón y glicerina para determinar mínimos, tanto en el plano como en el espacio.

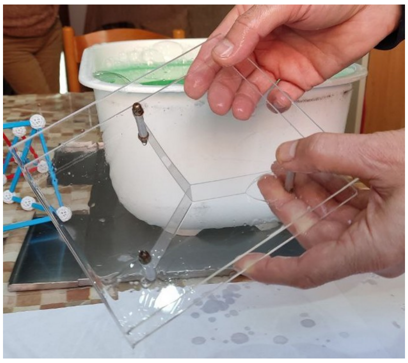


Figura 1. Punto de fermat de 3 puntos en jabón

2. PUNTO DE FERMAT EN EL PLANO

Vamos a estudiar cuál es el mínimo recorrido para conectar diferentes ciudades en el plano. Para eso construiremos unas placas transparentes con imanes y las sumergimos en el jabón para ver la pompa resultante. Después lo representamos usando GeoGebra y estudiamos qué matemáticas se esconden detrás de esta construcción

2.1. PUNTO DE FERMAT PARA 3 PUNTOS

Se plantea el problema de conectar 3 ciudades y descubrimos el resultado en la mezcla del jabón tal y como nos enseña la figura 1. Para representarlo en GeoGebra calculamos el punto de Fermat de la siguiente forma:

- Construimos el triángulo equilátero asociado a uno de los lados del triángulo generado por los tres puntos orientado hacia fuera
- Unimos el vértice nuevo del triángulo equilátero al vértice opuesto del triángulo original con un segmento
- Repetimos este proceso por los 3 lados del triángulo original
- Los 3 nuevos segmentos coinciden en un mismo punto, el punto de Fermat.

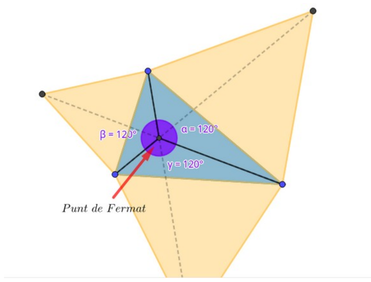


Figura 2. Construcción del Punto de Fermat de 3 puntos

En el taller ofrecemos un [libro de GeoGebra]() donde se explica paso a paso como encontrar este punto de dos formas distintas. A la vez, se muestra como introducir una imagen en la construcción del GeoGebra para mostrar el ejemplo de las ciudades, y también para comprobar el resultado obtenido con el jabón.

Figura 3. Imagenes en GeoGebra

Llegados a este punto, nos encontramos con problemas cuando uno de los ángulos del triángulo formado por los 3 puntos es mayor que 120º: lo analizamos y damos respuesta.

Mostramos una demostración de porqué la construcción realmente es el punto de Fermat con un applet de GeoGebra:

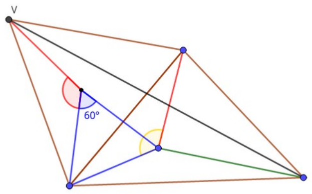


Figura 4. Demostración Punto de Fermat de 3 puntos

2.2. Punto de Fermat en 4 puntos

Repetimos el proceso y la explicación para 4 puntos. Primero hacemos conjeturas sobre cuál va a ser el resultado antes de crear la construcción en jabón. Una vez vemos la pompa resultante, pasamos a estudiar las matemáticas que aparecen.

Se muestra como se construye el modelo con GeoGebra, que es una ampliación de la hecha con 3 puntos, y se comprueba cómo funciona.

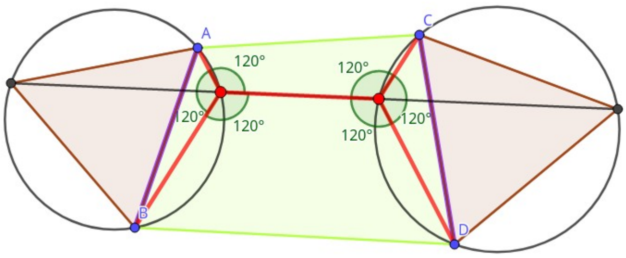


Figura 5. Recorrido mínimo para 4 puntos

En este punto, aparecen nuevos problemas que se analizan y para los que se buscan diferentes soluciones. Se demuestra el porqué de la construcción y se conjetura que pasaría con 5 y 6 puntos.

3. PUNTO DE FERMAT EN EL ESPACIO

Construiremos poliedros con pajitas y los sumergimos en el jabón para ver la pompa resultante. Intentaremos demostrar qué es lo que pasa y representarlo en GeoGebra.

3.1. Punto de Fermat en el Tetraedro

Estudiaremos las pompas resultantes de introducir un tetraedro en una mezcla jabonosa. Observaremos que si el tetraedro es regular, la construcción en GeoGebra es relativamente sencilla.

- Construimos el tetraedro regular asociado a una de las caras del tetraedro original orientado hacia fuera
- Unimos el nuevo vértice del tetraedro al vértice opuesto del tetraedro original con un segmento
- Repetimos este proceso por las otras 3 caras del tetraedro original

- Los 4 segmentos coinciden en un punto, el punto de Fermat.

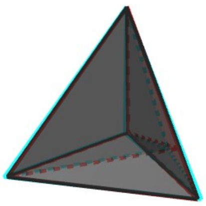



Figura 6. Punto de Fermat del Tetraedro regular

Mostraremos la dificultad de calcular este punto para un tetraedro no regular, viendo la dificultad para que se cumplan las condiciones de Plateau: que el ángulo entre las pompas sea de 120º y la superficie sea mínima. Utilizaremos superficies capaces y métodos iterativos con GeoGebra.

Se mostraran diferentes maneras de representar la pompa resultante con GeoGebra y también se representa el tetraedro con una pompa en el medio formada por 4 triángulos esféricos.

3.2. Punto de Fermat en el Cubo

Repetiremos el proceso con un cubo. Este caso ya es abierto y se complica. A diferencia del triángulo, como la pompa resultante es un cuadrado en el centro, se puede parametrizar con un solo parámetro según la medida del lado. A partir de un deslizador de Geogebra podemos ir variando el cuadrado, calculando los ángulos entre superficies y la suma de las áreas de las pompas resultantes.

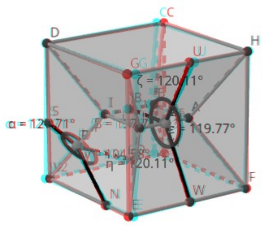
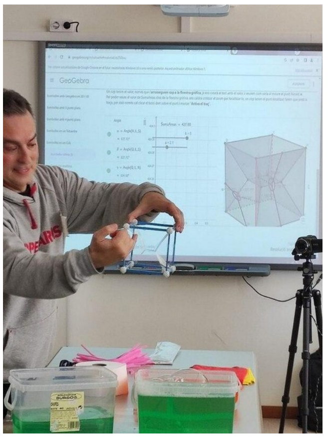


Figura 7. Pompa resultante de un cubo en jabón

Analizaremos analíticamente como se tendría que comportar la pompa y que medida debería tener este cuadrado imponiendo las condiciones de 120º entre pompas y superficie mínima total. También lo analizaremos utilizando diferentes herramientas del GeoGebra.



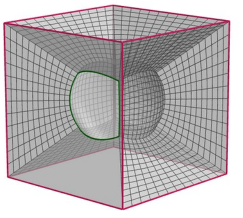


Figura 8. Imagen del cubo en jabón y GeoGebra   Figura 9. Representación pompa dentro del cubo

4. REFERENCIAS

MAMBO: MAtemáticas aMb Bombolles, Jornada pedagógica celebrada en el CESIRE (Barcelona) el 15 de abril de 2023, http://mambo.feemcat.org

Aubanell Anton, *Geometria amb Bombolles de sabó,* Charla realizada durante más de 30 años por Anton, Enlace a una grabación

Aubanell Anton, *Geometria amb Bombolles de sabó,* Propuestas didácticas para llevar en el aula, ARC, https://apliense.xtec.cat/arc/node/1332

Cyril Isenberg, The Science of Soap Films and Soap Bubbles, Dover publications, 1992