

"Es probable que a veces ocurra lo improbable".

atribuida a Agathon.

## Resumen

¿Quién no conoce el juego del amigo invisible?

Imaginemos una clase con cualquier número de alumnos. El tutor decide, para que los alumnos se conozcan mejor y mejorar la convivencia, que todos participen en el juego del amigo invisible. Cada uno de ellos tendrá que hacerle un regalo al compañero que le toque por sorteo, pudiéndose gastar como mucho un euro y procurando que sea algo imaginativo hecho por ellos mismos. Durante las semanas posteriores, tendrán que conocer los gustos y preferencias de sus "amigos invisibles" sin que éstos descubran quién regala a quién.

La idea está bien, pero ¿cómo realizar el sorteo?

El sorteo es válido cuando a ninguno le ha tocado su propio nombre, nadie conoce el amigo invisible de los demás y todos tienen la misma probabilidad de ser elegidos por cualquier jugador.

Analicemos el método más común utilizado para este tipo de juego:

En una urna se colocan papeletas con el nombre de cada uno de los jugadores y todos escogen a la vez. Si a ninguno le ha tocado su propio nombre, el sorteo es válido. En caso contrario, se vuelven a introducir las papeletas y se repite el sorteo.

Si llamamos  $S_n$  al suceso "El sorteo entre  $n$  jugadores ha sido válido", obtenemos:

$$P(S_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{1}{k!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \quad \text{para } n \geq 2 \quad (1)$$

Es decir:

$$P(S_n) = P(S_{n-1}) + (-1)^n \frac{1}{n!} \quad \text{para } n \geq 2 \text{ y siendo } P(S_1) = 0 \quad (2)$$

También se obtiene el caso límite cuando el número de personas tiende a infinito:

$$P(S_\infty) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = e^{-1} = 0.367879441... \quad (3)$$

En la siguiente tabla, se recogen algunas probabilidades de que el sorteo sea válido según el número de jugadores:

Jugadores	1	2	3	4	5	6	7	....	Infinitos
Probabilidad	0	0.5	0.3333..	0.375	0.3666..	0.3680..	0.3678..		0.367879441...

De manera gráfica, podemos visualizar estas probabilidades en la siguiente espiral sobre el intervalo  $[0,0.5]$ , donde  $n$  es el número de jugadores y  $p$  la probabilidad de que el sorteo sea válido.

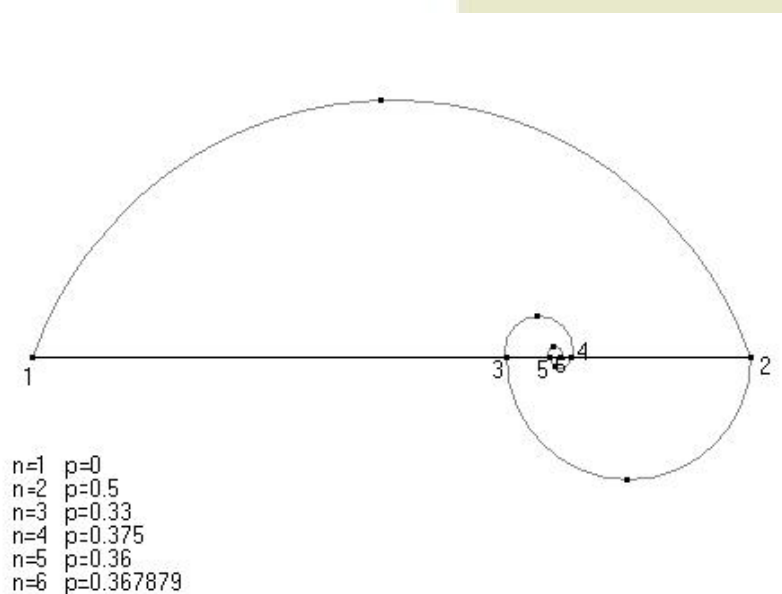


Figura 1. Espiral que relaciona la probabilidad con el número de jugadores.

Nuestro reto es diseñar un sorteo en que el nos aseguremos:

- El sorteo se tenga que realizar una sola vez.
- Ningún jugador tenga información sobre el amigo invisible de los demás.
- Todos los jugadores tengan la misma probabilidad de ser amigos invisibles de los demás.

**Ésta es nuestra propuesta para realizar un sorteo con  $n$  jugadores:**

Se colocan en una urna papeletas con los números desde el 1 hasta  $n$  y cada jugador escoge uno de ellos sin que el resto conozca el número que ha obtenido.

Por otro lado, en una mesa se colocan formando un círculo  $n$  tarjetas numeradas desde el 1 hasta  $n$  y ordenadas en el sentido de las agujas del reloj.

Sin que el resto lo vean, un jugador se acerca al círculo y escribe su nombre debajo de la tarjeta que está clasificada con el número que ha obtenido en el sorteo, dejándola en el mismo lugar. Seguidamente, otro jugador realiza la misma operación y así hasta que todos han escrito sus nombres debajo de su número correspondiente.

Una vez finalizada esta fase, sin que el resto de los jugadores lo vean y sin seguir ningún orden, un jugador se acerca al círculo y levanta la papeleta que contenga el número siguiente al que escogió en el sorteo y la vuelve a colocar boca abajo en su lugar después de leer el nombre correspondiente. Si es el número  $n$ , escogerá la papeleta con el 1. Ese nombre será su amigo invisible. Seguidamente, otro jugador realizará la misma operación y así hasta que todos hayan descubierto a su amigo invisible.

Os planteamos así nuestro reto:

**- ¿Cómo realizar el sorteo de forma operativa entre un número elevado de jugadores para que se tenga que realizar una sola vez, ninguno tenga información sobre los demás y todos tengan la misma probabilidad de ser amigos invisibles del resto de los jugadores?**